

**ARTUR BĂLĂUCĂ**

# **ALGEBRĂ GEOMETRIE**

**1500**

**DE PROBLEME SEMNIFICATIVE**

**PENTRU**

**OLIMPIADE, CONCURSURI**

**ȘI**

**CENTRE DE EXCELENȚĂ**

**18 TEME PENTRU CENTRELE DE EXCELENȚĂ**

**200 DE PROBLEME REZOLVATE**

**CLASA A VII-A**

**EDIȚIA A IX-A**

**EDITURA TAIDA**

**IAȘI, 2020**

## CUPRINS

	Breviar	Enunțuri	Soluții
Programa Olimpiadei de Matematică .....		5	
<b>Algebră</b>			
Capitolul I. Mulțimea numerelor întregi. Divizibilitate în $\mathbb{Z}$ . (Temă pentru centrul de excelență) .....	7	11	236
Capitolul II. Relația de congruență modulo $m$ (Temă pentru centrul de excelență) .....	21	23	244
Capitolul III. Mulțimea numerelor raționale (Temă pentru centrul de excelență)	25	28	246
Capitolul IV. Numere reale. Modulul unui număr real. Partea întregă și partea fracționară a unui număr real (Temă pentru centrul de excelență)	34	40	251
Capitolul V. Reguli de calcul cu radicali. Raționalizarea numitorilor. Formula radicalilor dubli (Temă pentru centrul de excelență) .....	44	46	253
Capitolul VI. Elemente de calcul algebric. Formule de calcul prescurtat. Identități algebrice (Temă pentru centrul de excelență) .....	53	55	259
Capitolul VII. Ecuații și sisteme de ecuații liniare. Ecuații diofantice (Temă pentru centrul de excelență) .....	64	75	264
Capitolul VIII. Inegalități. Probleme de maxim și de minim (Temă pentru centrul de excelență) .....	82	86	274
Capitolul IX. Elemente de organizare a datelor .....		98	285
Capitolul X. Probleme de numărare. Probleme de colorare .....	100	105	286
<b>Geometrie</b>			
Capitolul I. Triunghiul (Temă pentru centrul de excelență) .....	116	119	299
Capitolul II. Patrulaterul (Temă pentru centrul de excelență) .....	124	130	305
Capitolul III. Cercul (Temă pentru centrul de excelență) .....	146	155	319
Capitolul IV. Asemănarea triunghiurilor (Temă pentru centrul de excelență) ....	165	174	329
Capitolul V. Relații metrice în triunghiul dreptunghic (Temă pentru centrul de excelență) .....	186	191	342
Capitolul VI. Arii (Temă pentru centrul de excelență) .....	196	202	349
Capitolul VII. Inegalități geometrice. Probleme de maxim și de minim (Temă pentru centrul de excelență) .....	209	213	356
Capitolul VIII. Construcții geometrice (Temă pentru centrul de excelență) .....	217	223	359
Capitolul IX. Probleme de loc geometric (Temă pentru centrul de excelență) .....	225	228	362
Capitolul X. Extinderi ale teoriei lui Pompeiu (Temă pentru centrul de excelență) .....			230

## MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI. DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{Z}$

(Temă pentru centrul de excelență)

### Rețineți!

Un număr întreg  $b$  divide un număr întreg  $a$  dacă există un număr întreg  $c$  astfel încât  $a = b \cdot c$ .



### Observații:

1. Nu există pentru orice pereche de numere întregi  $a$  și  $b$  un număr întreg  $c$  astfel încât  $a = b \cdot c$  și urmează că relația  $b / a$  nu este peste tot definită în  $\mathbb{Z}$ .
2. Pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$  mulțimea  $D_a = \{x \in \mathbb{Z} / x / a\}$  este mulțimea divizorilor lui  $a$ . Dacă  $a \in \mathbb{Z}^*$ , atunci divizorii lui  $a$  sunt în număr finit (cel mult  $2|a|$ ).



### Proprietăți

1.  $a / a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$  (reflexivitatea);
2.  $a / b$  și  $b / c \Rightarrow a / c$  (tranzitivitatea).
3.  $a / b$  și  $b / a \Rightarrow a = b$  sau  $a = -b$ , adică  $|a| = |b|$ ;
4.  $1 / a$  și  $-1 / a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ .
5.  $a / 1$  sau  $a / -1 \Rightarrow |a| = 1$ ;
6.  $a / 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ ;
7.  $0 / a \Rightarrow a = 0$ ;
8.  $a / b \Leftrightarrow (-a) / b \Leftrightarrow a / (-b) \Leftrightarrow (-a) / (-b)$ ;
9.  $a / b \Rightarrow a / b \cdot c$ , oricare ar fi  $c \in \mathbb{Z}$ .
10.  $a / b_1$  și  $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 \pm b_2$ ;
11.  $a / b_1$  și  $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 c_1 + b_2 c_2$ , oricare ar fi  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ ;
12.  $a / b \Rightarrow ac / bc, c \in \mathbb{Z}$ ;
13.  $ac / bc$  și  $c \neq 0 \Rightarrow a / b$ ;
14.  $a_1 / b_1$  și  $a_2 / b_2 \Rightarrow a_1 a_2 / b_1 b_2$ ;
15.  $a / b \Rightarrow b = 0$  sau  $|a| \leq |b|$ ;
16.  $a / b$  și  $|a| > |b| \Rightarrow b = 0$ .

### Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun

$\Rightarrow$  C.m.m.d.c. al numerelor întregi  $a$  și  $b$  (notat  $(a, b)$ ) este un număr întreg  $d$  care satisface condițiile: **1)**  $d / a$  și  $d / b$ ; **2)** dacă  $d_1 / a$  și  $d_1 / b$ , atunci  $d_1 / d$ .

$\Rightarrow$  C.m.m.m.c. al numerelor întregi  $a$  și  $b$  (notat  $[a, b]$ ) este un număr întreg  $m$  care îndeplinește condițiile: **1)**  $a / m$  și  $b / m$ ; **2)** oricare ar fi  $m_1 \in \mathbb{Z}$  cu proprietatea  $a / m_1$  și  $b / m_1$ , atunci  $m / m_1$ .

$\Rightarrow$  Două numere întregi  $a$  și  $b$  se numesc prime între ele dacă  $(a, b) = 1$ .

$\Rightarrow$  Dacă  $a / bc$  și  $(a, b) = 1$ , atunci  $a / c$ . (**teorema lui Gauss**)

$\Rightarrow$  Dacă  $a / c, b / c$  și  $(a, b) = 1$ , atunci  $ab / c$ .

$\Rightarrow [a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$ .

### Numere prime și numere compuse

$\Rightarrow$  Un număr întreg  $a$  se numește **număr prim** dacă mulțimea divizorilor săi are cardinalul 4.



### Observații:

1. Condiția revine la  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  și  $D_a = \{-1, 1, -a, a\}$ .
2. Reprezentarea  $n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , unde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*, p_1, p_2, \dots, p_k$  sunt numere prime și  $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k$  se numește **descompunerea canonică** a numărului întreg  $n$ .

☞ Numărul divizorilor întregi ai unui număr întreg  $n$  ( $n \neq 0$ ) scris sub forma:

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ este egal cu } 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

### Probleme rezolvate:

1. Aflați numerele întregi  $x$  știind că: **a)**  $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$ ; **b)**  $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$ .

**Rezolvare:**

**a)**  $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$  implică  $x-3 \mid 4x-3$ , de unde  $x-3 \mid 4(x-3) + (12-3)$  sau  $x-3 \mid 4(x-3) +$

$+9$ , **(1)** Cum  $x-3 \mid 4(x-3)$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ , din **(1)** rezultă  $x-3 \mid 9$ , adică  $x-3 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$ . Rezolvând ecuațiile:  $x-3 = -9$ ;  $x-3 = -3$  etc. se obține:  $x \in \{-6; 0; 2; 4; 6; 12\}$ .

**b)**  $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$  implică  $3x+5 \mid 5x-3$ , de unde  $3x+5 \mid 3(5x-3)$  sau  $3x+5 \mid 15x-9$  sau

$3x+5 \mid 5(3x+5) - 9 - 25$  sau  $3x+5 \mid 5(3x+5) - 34$ , **(1)** Cum  $3x+5 \mid 5(3x+5)$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$  din **(1)** rezultă  $3x+5 \mid 34$ , de unde  $3x+5 \in \{-34; -17; -2; -1; 1; 2; 17; 34\}$ . Rezolvând pe rând ecuațiile:  $3x+5 = -34$ ;  $3x+5 = -17$  etc. se obține  $x \in \{-13; -2; -1; 4\}$ .

2. Fie șirul de numere naturale  $7, 77, 777, 7777, \dots$  scrise în baza zece.

Să se arate că printre primii 2011 termeni ai șirului există cel puțin unul divizibil cu 2011.

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița, 2014, Rodica Coman)

**Rezolvare:**

Din primele 2011 numere din șirul  $10^1, 10^2, 10^3, \dots$  vor exista cel puțin două numere care vor da același rest la împărțirea cu 2011 pentru că  $(10, 2011) = 1$ .

Fie acestea  $10^a$  și  $10^b$  cu  $a > b$ .

Din  $2011 \mid 10^a - 10^b$  rezultă  $2011 \mid 10^b \cdot (10^{a-b} - 1)$ , adică  $2011 \mid 10^b \cdot \underbrace{999\dots9}_{(a-b) \text{ cifre}}$ .

Însă  $(2011, 10) = 1$  și  $(2011, 9) = 1$ , rezultă că  $2011 \mid \underbrace{11\dots1}_{(a-b) \text{ cifre}}$ .

Din  $2011 \mid \underbrace{11\dots1}_{(a-b) \text{ cifre}}$  și  $(7, 2011) = 1$ , rezultă că  $2011 \mid \underbrace{77\dots7}_{(a-b) \text{ cifre}}$ .

3. Determinați numerele naturale nenule  $x, y, z$  pentru care  $\frac{3x}{3x+1} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{x+4z}{z+6}$ .

(Concursul „Ștefan Dârțu“, Vatra Dornei, Supliment G.M. 5/2019, Ion Neață)

**Rezolvare:**

Deoarece  $\frac{3x}{3x+1} < 1$ , avem  $\frac{x+4z}{z+6} < 1$ , de unde  $x+3z < 6$ .

Putem avea:  $x=1, z=1$  sau  $x=2, z=1$ .  $x=z=1$  conduce la  $\frac{3}{4} = \frac{2y}{2y+1} = \frac{5}{7}$ , contradicție!

$x=2$  și  $z=1$  conduce la  $\frac{6}{7} = \frac{2y}{2y+1}$ , de unde  $14y = 12y + 6$ , adică  $y=3$ .

Prin urmare:  $x=2, y=3$  și  $z=1$ .

9. Fie numerele naturale  $a, b, c$  astfel încât:  $a/c^2, b/a^2$  și  $c/b^2$ .

Să se arate că  $a \cdot b \cdot c / (a + b + c)^{210}$ , ( $n/m$  se citește  $n$  divide  $m$ ).

(Artur Bălăucă)

**Rezolvare:**

- dacă  $a = 0$  din  $a/c^2 \Rightarrow c = 0$ . Din  $c = 0$  și  $c/b^2 \Rightarrow b = 0$ .  $0 \cdot 0 \cdot 0 / (0 + 0 + 0)^7$ , soluție.
- dacă  $a = 1$  din  $b/a^2 \Rightarrow b = 1$  și din  $c/b^2 \Rightarrow c = 1$ .  $1 \cdot 1 \cdot 1 / (1 + 1 + 1)^7$ , soluție.
- dacă  $p/a, p$  prim atunci  $p/c^2$ , de unde  $p/c$ , iar din  $c/b^2 \Rightarrow p/b$ .
- analog, dacă  $p/b, p$  prim, atunci  $p/a$  și  $p/c$  iar dacă  $p/c, p$  prim  $\Rightarrow p/a$  și  $p/b$ .

Urmează că numerele naturale  $a, b, c$  admit în descompunerea lor în factori primi aceiași factori primi.

Deci avem:  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ,  $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$  și  $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$  unde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  sunt numere naturale prime ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) distincte două câte două.

Din  $b/a^2 \Rightarrow \beta_i \leq 2\alpha_i$ . Din  $c/b^2 \Rightarrow \gamma_i \leq 2\beta_i$  și din  $a/c^2 \Rightarrow \alpha_i \leq 2\gamma_i$ , ( $\forall i = \overline{1, k}$ ).

Este suficient să analizăm cazul:  $a = p^\alpha$ ,  $b = p^\beta$  și  $c = p^\gamma$  unde  $p$  este număr prim și  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ .

Dacă  $\alpha = \min(\alpha, \beta, \gamma)$  atunci  $\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha + 2\alpha + 4\alpha = 7\alpha$  și  $abc = p^{\alpha + \beta + \gamma} \leq (p^\alpha)^7$ .

Avem  $abc = p^{\alpha + \beta + \gamma}$  și  $(a + b + c)^7 = (p^\alpha)^7 \cdot (1 + p^{\beta - \alpha} + p^{\gamma - \alpha})^7$ .

Cum  $abc / (p^\alpha)^7 \Rightarrow abc / (a + b + c)^7$ .

Analog se analizează cazurile  $\beta = \min(\alpha, \beta, \gamma)$  și  $\gamma = \min(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Avem  $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\gamma + \beta + \gamma \leq 4\beta + \beta + 2\beta = 7\beta$  și, respectiv,  $\alpha + \beta + \gamma \leq \gamma + 2\gamma + 4\gamma = 7\gamma$ .

Din  $a \cdot b \cdot c / (a + b + c)^7 \Rightarrow a \cdot b \cdot c / [(a + b + c)^7]^{30}$ , adică  $a \cdot b \cdot c / (a + b + c)^{210}$ .

## EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Fie mulțimile:  $A = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \leq x \leq 2\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x < 4\}$ . Determinați mulțimile:  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ .
2. Fie mulțimile:  $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 3\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z}^* / |x - 1| < 2\}$ . Determinați mulțimile:  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ .
3. Determinați  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât mulțimile  $A = \{1; 2\}$  și  $B = \{2x - 1; 5x - 3\}$  să fie egale.
4. Să se determine mulțimile  $A, B, C, D$  știind că:
  - (1)  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ;
  - (2)  $C \cup D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ;
  - (3)  $(A \cap B) \times (C \cap D) = \{(2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)\}$ ;
  - (4)  $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{(0, 6), (0, 7), (1, 6), (1, 7)\}$ .
5. Să se determine mulțimile:  $A, B, C$  știind că sunt satisfăcute simultan relațiile:
  - (1)  $(A \setminus C) \times (B \setminus C) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$ ;
  - (2)  $(A \setminus B) \times (C \setminus A) = \{(1, 5), (1, 6), (4, 5), (4, 6)\}$ ;
  - (3)  $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, n\}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$  și  $n \geq 7$ .

# CAPITOLUL 2

## RELAȚIA DE CONGRUENȚĂ MODULO $m$

(Temă pentru centrul de excelență)

### Rețineți!

Două numere întregi  $a$  și  $b$  se numesc **congruente modulo  $m$** , unde  $m$  este un număr întreg, dacă  $m \mid a - b$ .

Notăție:  $a \equiv b \pmod{m}$ . Se citește „ $a$  congruent cu  $b$  modulo  $m$ ”.



### Observații:

1. Pentru  $m = 0$ ,  $m \mid a - b \Leftrightarrow a = b$ , adică  $(a \equiv b \pmod{0}) \Leftrightarrow a = b$ , deci relația de egalitate este un caz particular al relației de congruență (în cazul când modulo este 0).
2.  $a \equiv b \pmod{1}$  și  $a \equiv b \pmod{-1}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ .
3. Dacă  $m \neq 0$  și  $r$  este restul împărțirii unui număr întreg  $a$  prin  $m$ , atunci  $a \equiv r \pmod{m}$  și  $a \equiv r - m \pmod{m}$ .



**Exemplu:**  $30 \equiv 8 \pmod{11}$  și  $30 \equiv -3 \pmod{11}$ .

(În aplicațiile practice, dintre numerele  $r$  și  $r - m$ , este de preferat cel care are modulul mai mic).

### Rețineți!

**Teoremă:** Două numere  $a$  și  $b$  sunt congruente modulo  $m$ ,  $m \neq 0$ , dacă și numai dacă dau același rest la împărțirea prin  $m$ .

### Proprietăți:

1.  $a \equiv a \pmod{m}$  (**reflexivitatea**);
2.  $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$  (**simetria**);
3.  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$  (**tranzitivitatea**);
4.  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$  și  $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ .

### Consecințe:

- a)  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$ .
- b) Un termen aflat într-un membru oarecare al unei congruențe poate fi trecut în celălalt membru, schimbându-i-se semnul.
- c) Se poate aduna sau scădea la fiecare membru al unei congruențe orice multiplu al modulului.

$$5. a \equiv b \pmod{m} \text{ și } c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}.$$

$$\text{În general } a_i \equiv b_i \pmod{m}, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m}.$$

### Consecințe:

- a)  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$ .
- b)  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ .
6.  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$ .
7.  $ac \equiv bc \pmod{m}$  și  $(c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$ .
8.  $ac \equiv bc \pmod{mc}$  și  $c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$ .

9.  $a \equiv b \pmod{m_1}$ ,  $a \equiv b \pmod{m_2}$ , ...,  $a \equiv b \pmod{m_k}$  și  $M = [m_1, m_2, \dots, m_k] \Rightarrow a \equiv b \pmod{M}$ .

10.  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $d/m \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$ .

11.  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $d/a, d/m \Rightarrow d/b$ .

**Consecință:**  $a \equiv b \pmod{m}$  și  $m/a \Rightarrow m/b$ .

**Mica teoremă a lui Fermat.** Dacă  $a, p \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  este prim (pozitiv) și  $p \nmid a$ , atunci  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Demonstrație:** Considerăm următorii multipli ai lui  $a$ :

$$M_1 = a, M_2 = 2a, M_3 = 3a, \dots, M_{p-1} = (p-1)a.$$

Nici unul dintre acești întregi nu se divide cu  $p$ .

Fie  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$  resturile obținute la împărțirea numerelor  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{p-1}$ , prin  $p$ .

Avem congruențele:  $M_1 \equiv r_1 \pmod{p}$ ,  $M_2 \equiv r_2 \pmod{p}$ , ...,  $M_{p-1} \equiv r_{p-1} \pmod{p}$ . (\*)

Oricare două din resturile  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$  sunt distincte. Într-adevăr, dacă presupunem că există  $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ ,  $i \neq j$  astfel încât  $r_i = r_j$ , urmează că  $p/M_i - M_j \Rightarrow p/a(i-j)$ .

Cum  $p \nmid a$ , se obține că  $p/i-j$ , ceea ce este absurd deoarece  $|i-j| < p$ . Rezultă că  $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ . (1)

Înmulțind membru cu membru congruențele (\*), obținem

$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \dots \cdot M_{p-1} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p}$ , adică  $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p} \Leftrightarrow a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p}$  și, cum  $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = (p-1)!$  (în baza relației (1)), rezultă că  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Teorema lui Euler.** Dacă  $a, m \in \mathbb{Z}$  și  $(a, m) = 1$ , atunci  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , unde  $\varphi(m)$  este **funcția lui Euler**. (numărul numerelor prime cu  $m$  mai mici decât  $|m|$ )

**Teorema lui Wilson.** Dacă  $p$  este un număr prim, atunci  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

**Teorema reciprocă a lui Wilson.** Dacă  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  și  $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ , atunci  $n$  este număr prim.

### Probleme rezolvate:

1. Să se arate că numărul  $A = 3^{40} - 2^{40}$  se divide cu 5. (G.M. 5/1987)

**Soluție:** Conform teoremei lui Fermat avem:  $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$  și  $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ .

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (3^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 3^{40} \equiv 1 \pmod{5}, \quad (1)$$

$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (2^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 2^{40} \equiv 1 \pmod{5}$ , (2) Scăzând membru cu membru congruențele (1) și (2), obținem  $3^{40} - 2^{40} \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 5/3^{40} - 2^{40}$ .

2. Să se afle cel mai mic număr natural  $k$  astfel încât numărul  $A = 194^{19} \cdot 125^{14} + k$  să fie divizibil cu 7. (G.M. 1/1988)

**Soluție:**  $194 = 7 \cdot 27 + 5 \Rightarrow 194 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 194^{19} \equiv 5^{19} \pmod{7}$ , (1)

Aplicând teorema lui Fermat, avem:

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{18} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{19} \equiv 5 \pmod{7}, \quad (2)$$

(1) și (2)  $\Rightarrow 194^{19} \equiv 5 \pmod{7}$ , (3)  $125 \equiv 7 \cdot 17 + 6 \Rightarrow 125 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 125 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 125^{14} \equiv (-1)^{14} \pmod{7} \Rightarrow 125^{14} \equiv 1 \pmod{7}$ , (4).

Înmulțind membru cu membru congruențele (3) și (4), obținem:

$194^{19} \cdot 125^{14} \equiv 5 \pmod{7}$ . (5)  $7/194^{19} \cdot 125^{14} + k \Rightarrow 194^{19} \cdot 125^{14} + k \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 194^{19} \cdot 125^{14} \equiv -k \pmod{7}$ . (6); (5) și (6)  $\Rightarrow 5 \equiv -k \pmod{7} \Rightarrow 5 + k \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 7/5 + k$ .  
 Cum cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 7 este 7, se obține  $k = 2$ .

3. Arătați că numărul  $7^{1994} + 5^{1994} - 74$  este divizibil cu 1994.

**Soluție:**  $7^{996} \equiv 1 \pmod{997}$  (Fermat)  $\Rightarrow (7^{996})^2 \equiv 1 \pmod{997} \Rightarrow 7^{1992} \equiv 1 \pmod{997} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 7^{1994} \equiv 49 \pmod{997}$ , (1)  $5^{996} \equiv 1 \pmod{997}$  (Fermat)  $\Rightarrow 5^{1992} \equiv 1 \pmod{997} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 5^{1994} \equiv 25 \pmod{997}$ , (2) Din (1) și (2)  $\Rightarrow 7^{1994} + 5^{1994} \equiv 74 \pmod{997}$  etc.

4. Fie  $p > 3$  un număr prim. Arătați că numărul  $7^p - 6^p - 1$  este divizibil cu 43.

(Olimpiadă Iran)

**Soluție:** Cazul  $p = 6k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Avem  $7^2 \equiv 6 \pmod{43} \Rightarrow (7^2)^3 \equiv 6^3 \pmod{43}$ . Însă  $6^3 \equiv 1 \pmod{43}$ , deci  $7^6 \equiv 1 \pmod{43}$ ,  
 de unde  $7^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$  și  $7^{6k+1} \equiv 7 \pmod{43}$ , (1). Pe de altă parte:  $6^3 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 6^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$  și  $6^{6k+1} \equiv 6 \pmod{43}$ , (2). Din (1) și (2) rezultă  $7^p - 6^p - 1 \equiv 0 \pmod{43}$ ,  
 adică  $43 / 7^p - 6^p - 1$ .

Cazul  $p = 6k + 5$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Din  $7^2 \equiv 6 \pmod{43}$  rezultă  $7^3 \equiv 42 \pmod{43}$ . Deci  $7^5 \equiv 252 \pmod{43}$ . Însă  $252 \equiv 37 \pmod{43}$ ,  
 deci  $7^5 \equiv 37 \pmod{43}$ . Din  $7^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$  și  $7^5 \equiv 37 \pmod{43}$  rezultă că  $7^{6k+5} \equiv 37 \pmod{43}$ ,  
 (3). Din  $6^3 \equiv 1 \pmod{43}$  și  $6^2 \equiv 36 \pmod{43}$  rezultă  $6^5 \equiv 36 \pmod{43}$ . Din  $6^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$  și  
 $6^5 \equiv 36 \pmod{43}$  rezultă că  $6^{6k+5} \equiv 36 \pmod{43}$ , (4). Din (3) și (4) rezultă că  $7^{6k+5} - 6^{6k+5} - 1 \equiv$   
 $\equiv (37 - 36 - 1) \pmod{43}$ , adică  $43 / 7^p - 6^p - 1$ .

## EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Să se arate că numărul  $E = 1948^{18n} + 96^{14n} - 2$  este divizibil cu 19, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Aflați restul împărțirii numărului  $10^{1000}$  la 27.
3. Să se afle restul împărțirii numărului  $a = 139^{227}$  la 15.
4. Aflați restul împărțirii numărului  $17^{19} \cdot 19^{17}$  la 16.
5. Să se determine restul împărțirii numărului: **a)**  $985 \cdot 1275 + 970$  la 9;
- b)**  $5^{381}$  la 13; **c)**  $46907 \cdot 157^8 - 151^5$  la 13; **d)**  $13^{23} \cdot 27^{41}$  la 8.
6. Aflați restul împărțirii numărului  $8^{183} + 13^{211}$  la 15.
7. Aflați restul împărțirii numărului  $439^{72}$  la 13.
8. Aflați restul împărțirii numărului  $1986^{1987}$  la 17.
9. Legenda spune că, la facerea lumii, Creatorul a plantat un arbore cu 7 crengi, pe fiecare creangă aflându-se câte 27 de frunze. Frunzele cresc alternativ, câte una pe fiecare creangă, astfel încât la începutul celui de-al  $n$ -lea an, numărul de frunze al arborelui este  $4^{3n} + 5^{3n}$ . Marele Vrăci numără frunzele de pe fiecare creangă și, dacă găsește același număr de frunze pe fiecare, știe că anul care tocmai a început va fi un an bun. Anul 2005 de la facerea lumii este un an bun? Care sunt anii buni?

(Concursul „Florica T. Câmpan“, Gabriel Popa, 2005)



Problemele de construcție geometrică sunt acele probleme în care se cere să se construiască o anumită figură cu ajutorul unor elemente date, folosind pentru aceasta anumite instrumente.

Într-o astfel de problemă se consideră date o serie de elemente geometrice (puncte, drepte, semidrepte, segmente, unghiuri, triunghiuri, cercuri arce de cerc, lungimi, măsuri de unghiuri sau arce) care alcătuiesc o familie  $\mathcal{D}$  și se cer determinate anumite necunoscute geometrice  $\mathcal{C}$  astfel încât pentru elementele din  $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$  să fie satisfăcute anumite proprietăți  $\mathcal{P}$ .

Problema necesită desenarea elementelor lui  $\mathcal{C}$  folosind anumite instrumente precizate de regulă în enunțul problemei.

În teoria clasică a construcțiilor geometrice instrumentele permise sunt doar *rigla neagrădată și compasul*.

Restricția tradițională la riglă și compas provine din antichitate, cu toate că grecii au recurs uneori și la alte instrumente.

Dar astfel de construcții nu erau apreciate, nu erau considerate construcții geometrice veritabile și erau admise numai dacă rigla și compasul s-au dovedit insuficiente.

Construcțiile geometrice au constituit partea principală a matematicii grecești și grecii acordau o deosebită importanță studierii lor; construcțiile geometrice au servit la început pentru demonstrarea existenței unor noțiuni abstracte ca: mijlocul unui segment, bisectoarea unui unghi, perpendiculara într-un punct pe o dreaptă etc. Preocupările pentru construcții geometrice au luat un avânt puternic etc. Multe dintre problemele actuale de rezolvare a problemelor de construcție au apărut încă în Academia lui Platon (427-347 î.Chr.). Geometrii din școala lui Platon, încercând să rezolve problemele geometrice doar cu rigla și compasul, respingeau orice soluții care ar fi folosit alte instrumente.

Dar tot în antichitate au apărut unele probleme care nu au putut fi rezolvate numai cu rigla și compasul, cum ar fi *construcția unor poligoane regulate (cu 7 laturi, cu 9, 11, 13, 14, 18 laturi etc.)* sau *cele trei probleme celebre ale antichității a căror rezolvare (cu rigla și compasul) a fost căutată în zadar*:

1. *Problema duplicării cubului (problema delică) care cere construirea muchiei unui cub al cărui volum să fie egal cu dublul volumului unui cub dat.*

2. *Problema trisecțiunii unghiului în care se cere să se împartă un unghi dat în trei unghiuri congruente.*

3. *Problema cvadraturii cercului care cere construirea unui pătrat care să aibă aceeași arie ca și un cerc dat.*

De-abia în secolul XIX s-a demonstrat că aceste probleme nu sunt rezolvabile cu rigla și compasul. În matematica modernă s-au stabilit care construcții sunt posibile cu rigla și compasul și care nu.

Atunci când în enunțul unei probleme nu se fac precizări privind instrumentele de construcție, se subînțelege că instrumentele permise pentru rezolvarea problemei sunt *rigla și compasul*.

**Altă abordare:** Pe latura  $BC$  se consideră punctul  $P$  astfel încât semidreapta  $AM$  este bisectoarea  $\sphericalangle BAP$ . Rezultă imediat că  $AN$  este bisectoarea  $\sphericalangle PAC$ . Aplicând teorema bisectoarei în  $\triangle BAP$  și  $\triangle PAC$  se obține

$$\frac{MB}{MP} = \frac{AB}{AP} \text{ și } \frac{NC}{NP} = \frac{AC}{AP}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{MB}{MP} = \frac{NC}{NP} = \frac{MB+NC}{MP+NP} = \frac{MB+NC}{MN} > 1,$$

deci  $MN < MB + NC$ .

Aplicând teorema articulației în perechile de triunghiuri ( $\triangle ABM$ ,  $\triangle ABP$ ) și ( $\triangle ANC$  și  $\triangle ABN$ ) se obține  $MB < MC = MN + NC$  și, respectiv,  $NC < BN = MB + MN$ .

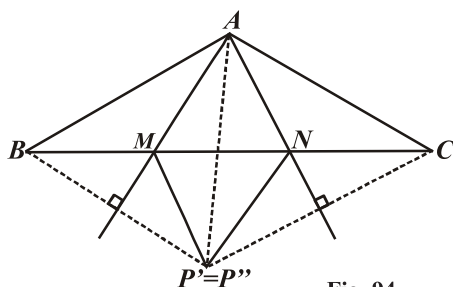


Fig. 94

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se construiască numai cu rigla și compasul un unghi de  $56^\circ 15'$ .
2. Având un unghi cu măsura de  $7^\circ$ , să se construiască, folosind numai rigla negradată și compasul, un unghi cu măsura de  $4^\circ$ .  
(Artur Bălăucă)
3. Există un triunghi ale cărui laturi să aibă lungimile:  $\frac{a}{\sqrt{2}-1}$ ,  $\frac{a}{\sqrt{3}-1}$ ,  $\frac{a}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$   
( $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ). În cazul în care există să se construiască triunghiul.  
(Artur Bălăucă)
4. Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  știind că lungimea laturii  $BC = a$ , a înălțimii  $AD = h$  ( $D \in BC$ ) și a medianeii  $BE = m$  ( $E$  pe latura  $AC$ ). Discuție.  
(G.M. 7/1982, Nistor Budescu)
5. Să se construiască un paralelogram cunoscând un unghi ascuțit și distanțele de la punctul de intersecție al diagonalelor la cele două laturi ale unghiului ascuțit.  
(G.M. 5/1979, D. Mârzan)
6. Fie  $AB$  un segment oarecare și  $O$  un punct exterior dreptei  $AB$ . Să se construiască numai cu rigla și compasul paralela la  $AB$  prin punctul  $O$  și apoi să se construiască simetrica acestei drepte față de  $AB$ .  
(G.M. 2-3/1982, Luis Funar)
7. Fiind date: o dreaptă  $a$ , un punct  $A$  situat la distanța  $d$  de dreapta  $a$  ( $d \neq 0$ ) și un segment de lungime  $r$ , să se construiască un cerc  $\mathcal{C}$  de rază  $r$  care să conțină punctul  $A$  și să fie tangent dreptei  $d$ .
8. Fiind date două puncte distincte  $A, B$  și o dreaptă  $d$  să se construiască un cerc  $\mathcal{C}$  care să conțină punctele  $A, B$  și să fie tangent dreptei  $d$ .

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL I. Mulțimea numerelor întregi. Divizibilitate în $\mathbb{Z}$

1.  $A = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2\}$ ,  $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . 2.  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ .  
 3.  $x = 1$ . 4.  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{6, 7, 8, 9\}$ ,  $D = \{8, 9, 10, 11\}$ . 5.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $B = \{2, 3, n\}$ ,  $C = \{5, 6, n\}$ . 6. **b)**  $(a, b, c) \in (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ .  
 7. **a)**  $3p + 1 = 5k + 2$ , de unde  $3p = 5k + 1$ . Atunci  $p = M_5 + 2$  iar  $k = M_3 + 1$  și  $3p + 1 = 5k + 2 =$   
 $= M_{15} + 7 = 15m + 7$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).  $1000 \leq 15m + 7 \leq 2000 \Rightarrow 67 \leq m \leq 132$ . Sunt 66 de numere.  
**b)** Conform principiului includerii și al excluderii avem:  $n|A \cup B \cup C| = n|A| + n|B| + n|C| - (n|A \cap B| +$   
 $+ n|B \cap C| + n|C \cap A|) + n|A \cap B \cap C|$ ,  $n|X|$  reprezintă numărul elementelor mulțimii  $X$  (cardinalul).  
 Atunci  $n|M| = n|A| + n|B| + n|C|$ .  $S|A| = S|B| = S|C| = s \in \mathbb{N}^*$ ,  $S|X|$  reprezintă suma elementelor mulțimii  $X$ .

Din relațiile de mai sus  $S|M| = 3s$ , dar  $S|M| = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  etc. Deci  $3s = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Se analizează cazurile:  $n = 3k$ ;  $n = 3k + 1$  și  $n = 3k + 2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), de unde rezultă că  $n \in \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \dots\}$ . Dacă  $n \in \{3, 5, 6, 8\}$  cum  $n$  este minim, verifică  $n = 8$  și avem:  $A = \{4; 8\}$ ;  $B = \{5; 7\}$  și  $C = \{1; 2; 3; 6\}$ . 8.  $A = \{-5\}$ ,  $B = \{-8, 12\}$ . 9.  $x_0$  și  $2000 - x_0$  sunt soluții ale ecuației date. Soluția ecuației fiind unică avem  $2000 - x_0 = x_0$ , de unde  $x_0 = 1000$ ,  $m = 1001000$ . 10. Termenii șirului  $\{a_n\}$  sunt numere naturale de forma  $4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , iar termenii șirului  $\{b_n\}$  sunt numere naturale de forma  $4k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). 11. Dacă  $n = 2k$ , atunci  $N = k$ , iar dacă  $n = 2k + 1$  atunci  $N = -k$ . 12.  $x \in \mathbb{Z}$ ;  $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}. y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |y| \geq 1, |z| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} \leq 1, \frac{1}{|y|} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow y = \frac{z}{2z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 1, x = 1999. \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \frac{z}{z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 2, x = 2000.$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow y = -z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = k, z = -k, x = 2001, k \in \mathbb{Z}^*. \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -1 \Rightarrow y = -\frac{z}{z+1} \in \mathbb{Z}^*; y = z = -2,$$

$$x = 2002. \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2 \Rightarrow y = -\frac{z}{2z+1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = -1, x = 2003. \mathbf{13. a)} 0, 0, 1$$
 în această ordine.

**b)** 2, 0, 0, 1 în această ordine. **14. a)**  $U(n) = 5$ ; **b)**  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 49 = (4 \cdot 0 + 1) \cdot (4 \cdot 1 - 1) \cdot (4 \cdot 1 + 1) \cdot (4 \cdot 2 - 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot \dots \cdot (4 \cdot 12 - 1)(4 \cdot 12 + 1) = (M_4 + 1) \cdot (4 \cdot 1 - 1) \cdot (4 \cdot 2 - 1) \cdot \dots \cdot (4 \cdot 12 - 1) = M_4 + 1$ . Dar  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 = M_{25}$  și ultimele două cifre ale numărului  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49$  sunt 2 și 5 în această ordine, deci penultima cifră a lui  $n$  este 7. **c)**  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 = (8 \cdot 0 + 1) \cdot (8 \cdot 0 + 3) \cdot (8 \cdot 0 + 5) \cdot (8 \cdot 0 + 7) \cdot (8 \cdot 1 + 1) \cdot (8 \cdot 1 + 3) \cdot \dots \cdot (8 \cdot 5 + 1) \cdot (8 \cdot 5 + 3) \cdot (8 \cdot 5 + 5) \cdot (8 \cdot 5 + 7) \cdot (8 \cdot 6 + 1) = M_8 + 1$ , pentru că  $(M_8 + 1) \cdot (M_8 + 3) \cdot (M_8 + 5) \cdot (M_8 + 7) = M_8 + 105 = M_8 + 1$ , dar  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 = M_{125}$ . Deci  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49$  are ultimele trei cifre 6, 2, 5 în această ordine, iar  $n$  are antepenultima cifră 3.

**15.**  $5^8$  are ultimele 5 cifre 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine.  $5^{8k}$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ , are ultimele 5 cifre tot 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine.  $5^5 \cdot 5^{8k}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) are ultimele 5 cifre 0, 3, 1, 2, 5 în această ordine. **16.**  $p = n^2 - n + 5n - 5 = n(n-1) + 5(n-1) = (n-1)(n+5)$ . Dacă  $p$  este prim, e necesar ca  $n-1 \in \{\pm 1\}$  sau  $n+5 \in \{\pm 1\}$ . Se obține  $n \in \{-6, -4, 0, 2\}$ . **17.** Avem:  $n^2 + 18n + 64 = (n+9)^2 - 17 = m^2$  ( $m \in \mathbb{Z}$ )  $\Leftrightarrow (n+9-m)(n+9+m) = 17 = (-17) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-17) = 17 \cdot 1$ . În final se obține  $n \in \{-18, 0\}$ .

**18.** Avem  $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$ . Dacă numărul  $5(n^2 + 2)$  este pătrat perfect atunci în mod necesar  $5 \mid n^2 + 2$ . Dar  $U(n^2 + 2) \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ , deci  $5 \nmid n^2 + 2$ .

**19.** Presupunem că  $a_i < 0$  și  $a_j < 0$ , oricare ar fi  $i \neq j$  ( $i$  fixat). Fie două inegalități consecutive ce nu-l conțin pe  $a_i$ . Din  $a_k(a_{k-1} - a_k + a_{k+1}) < 0$  și  $a_{k+1}(a_k - a_{k+1} + a_{k+2}) < 0$ , rezultă  $a_{k+1} + a_{k+2} < 0$ , absurd pentru că  $a_k > 0$ ,  $a_{k+1} > 0$ . Dacă două numere  $a_i$  și  $a_j$  sunt negative iar restul,  $a_i > 0$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq p$ . Se procedează analog. Deci sunt cel puțin trei numere negative. Pentru a arăta că există cel puțin trei numere pozitive se procedează la fel. **20.** Orice număr natural prim  $p$  ( $p > 3$ ) are una din formele:

# GEOMETRIE

## CAPITOLUL I. Triunghiul

1.  $\sphericalangle C = 60^\circ$ . 2. Dacă am avea  $b \neq c$ , atunci ar rezulta că  $|b - c| \geq 1$  și în acest caz triunghiul nu există.  
 3. Fie  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AB$  și, respectiv,  $AC$  ale unui triunghi  $\triangle ABC$ ,  $I$  punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului și  $P \in AI \cap BC$ . În ipoteza  $I \in MN$  se obține  $AI \equiv IP$ . Acum triunghiul  $\triangle ABP$  admite  $BI$  ca mediană și bisectoare, deci  $AB \equiv BP$ . Analog ar urma  $AC \equiv CP$  și s-ar obține  $AB + AC = BC$ , absurd. 4.  $\sphericalangle A = 45^\circ$ . Ducem  $BF \perp AC$ ,  $F \in AC$ .  $\sphericalangle ABF = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABF$  este isoscel  $\Rightarrow AF \equiv BF \Rightarrow AF \equiv FD \Rightarrow \triangle AFD$  este isoscel cu  $\sphericalangle AFD = 150^\circ$  și  $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FDA = 15^\circ$ . Se obține  $\sphericalangle DAE = 7^\circ 30'$ .  
 5.  $\sphericalangle CEM \equiv \sphericalangle CME \Rightarrow CM \equiv CE$  (fig. 139)  $MN = \frac{CE}{2} \Rightarrow MC = 2 \cdot MN$ . 6. a) Se arată că segmentul  $MP$  este linie mijlocie în  $\triangle ACD$  și că  $NC \perp BD$ ; b)  $\triangle BCE$  este isoscel. (fig. 140)

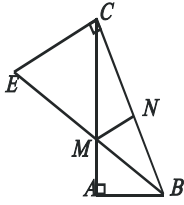


Fig. 139

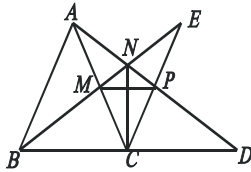


Fig. 140

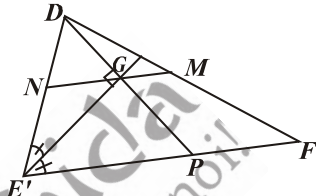


Fig. 141

7. Utilizând teorema liniei mijlocii sau (t.f.a.) se arată  $T$  și  $S$  sunt mijloacele segmentelor  $PN$ , respectiv  $PM$ , etc. 8. a) Fie  $DG \cap EF = \{P\}$  (fig. 141).  $\triangle DEP$  este isoscel. De ce? Deci segmentul  $EG$  este mediană în  $\triangle DEP$  și cum  $DM \equiv MF$  rezultă că  $GM$  este linie mijlocie în  $\triangle DPF$  și urmează că  $GM \parallel EF$ . b) Și  $NG$  este linie mijlocie în  $\triangle DEP$ . Finalizați cu axioma paralelelor. 9. Rezolvând în  $\mathbb{N}^*$  ecuația  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  știind că  $a + b + c$  este impar se obține soluția unică  $a = b = c$ . Deci triunghiul este echilateral. 10. Fie  $P$  pe segmentul  $BC$  cu  $\sphericalangle BAP = 60^\circ$ . (fig. 142) Avem:  $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 40^\circ$ .  $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 70^\circ$ .  $\sphericalangle BDF = \sphericalangle B = 40^\circ$ .  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAD = 100^\circ - 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAD = 30^\circ$ .  $DF \parallel AC$  și  $AD$  - secantă implică  $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CAD = 70^\circ$ , deci  $\sphericalangle AFD = 70^\circ$ . În  $\triangle DAF$ :  $\sphericalangle FAD = 30^\circ$  și  $\sphericalangle ADF = \sphericalangle AFD = 70^\circ$  (alterne interne). În  $\triangle BAP$ :  $\sphericalangle B = 40^\circ$  și  $\sphericalangle BAP = 60^\circ$  implică  $\sphericalangle APB = 80^\circ$ . În  $\triangle APD$ :  $\sphericalangle APD = 80^\circ$  și  $\sphericalangle PAD = 30^\circ$  implică  $\sphericalangle PDA = 70^\circ$ . Comparăm  $\triangle PAD$  cu  $\triangle FAD$  ele au:  $\sphericalangle PAD = \sphericalangle FAD = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle PDA = \sphericalangle FDA = 70^\circ$  și  $AD \equiv AD$ . Deci  $\triangle PAD \equiv \triangle FAD$  de unde  $AP \equiv AF$  și  $\sphericalangle PAF = 60^\circ$ . Prin urmare,  $\triangle PAF$  este echilateral.  $\triangle PAC$ :  $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA = 40^\circ \Rightarrow PA \equiv PC$ , însă  $PA \equiv PF$  deci  $PC \equiv PF$ , dar  $\sphericalangle FPC = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ \Rightarrow \sphericalangle PCF = 10^\circ$ . 11. Avem:  $\sphericalangle ABC = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$  și  $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBP = 20^\circ$ , iar  $\sphericalangle APB = 180^\circ - (20^\circ + 80^\circ) = 80^\circ$ , de unde  $AB \equiv BP$ . Dar  $BD \equiv AC \equiv AB$ , deci și  $\triangle BDP$  este isoscel, iar  $\sphericalangle BDP = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle PBD)}{2} = 75^\circ$  și  $\sphericalangle ADB = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ ;  $\sphericalangle ADP = 75^\circ - \sphericalangle ADB = 10^\circ$  și în final:  $\sphericalangle DAP = 80^\circ - 65^\circ = 15^\circ$  și  $\sphericalangle APD = 155^\circ$ . (fig. 143)

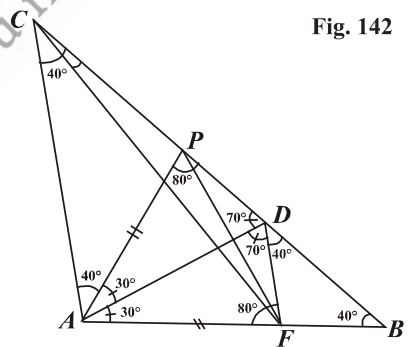


Fig. 142

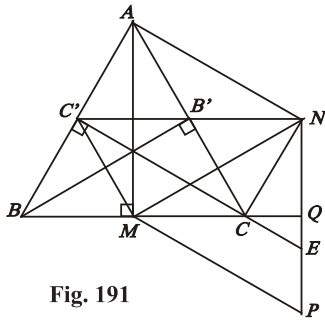


Fig. 191

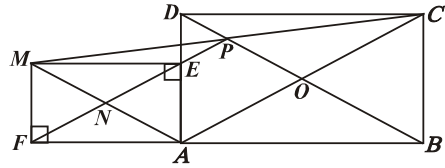


Fig. 192

$OP$  este linie mijlocie în  $\triangle MAC$ , deci  $MA \parallel PO$ . Din  $MA \parallel BD$  rezultă  $\angle ADB \equiv \angle DAM \equiv \angle DAC$ ,  $\angle MAF = \angle OAB = \angle NFA = \angle OBA = 90^\circ - \angle DAM$ , de unde rezultă  $FE \parallel AC$  etc; **b)** Segmentul  $NP$  este linie mijlocie în  $\triangle MAC$ , deci  $NP \parallel AC$  și cum  $EF \parallel AC$  rezultă  $F, E, P$  coliniare (axioma paralelelor).

**86. a)** Se aplică teorema liniei mijlocii și faptul că diagonalele unui dreptunghi sunt congruente. **b)** Fie  $\{E\} = QN \cap PB$ . Se arată că  $\triangle ENS \sim \triangle BMS$  (t.f.a.).  $EN = \frac{PC}{2} = \frac{MB}{2}$  etc. **87.** Deoarece punctul de intersecție al diagonalelor este egal depărtat de laturile patrulaterului, atunci diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului și din congruențe de triunghiuri rezultă că patrulaterul este romb.

**88. a)**  $\angle AGE = \angle DGC = \angle AEG = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle C \Rightarrow \triangle AEG$  este isoscel  $\Rightarrow AE \equiv AG$ . **(1)** **b)** Punctul  $E$  este egal depărtat de laturile  $\triangle ACB$ , deci  $AE \equiv EF$ . **(2)** Din **(1)** și **(2)** rezultă că  $AG \equiv EF$  și, cum  $EF \perp BC$ ,  $AG \perp BC$  mai avem că  $AG \parallel EF$  etc. **89.** Patrulaterul  $CODE$  devine romb dacă  $O$  este mijlocul segmentului  $AB$ . **90.** „ $\Rightarrow$ ” Semidreapta  $AF$  bisectoare și înălțime în  $\triangle NAE \Rightarrow AN \equiv AE$  **(1)**  $AN \parallel DM \Rightarrow \angle NAM = \angle EMA$  (alterne interne)  $\Rightarrow \angle MAE = \angle AME$  și deci  $\triangle AEM$  este isoscel de unde  $AE \equiv EM$ . Conform relației **(1)** avem  $AN \equiv EM$  și pentru că  $AN \parallel EM$ , patrulaterul  $AEMN$  devine romb, de unde  $MN \parallel AE$ . „ $\Leftarrow$ ”  $MN \parallel AE \Rightarrow AEMN$  este paralelogram, însă semidreapta  $AF$  bisectoare implică  $AEMN$  este romb, deci  $\angle AFE = 90^\circ$ .

**91.** Fie patrulaterul  $ABCD$  cu laturile consecutive  $AD, DC$  și  $BC$  congruente. Dacă  $AB \equiv AD$ , atunci  $ABCD$  este romb. Dacă  $AB \neq AD$ , atunci considerând faptul că patrulaterul  $ABCD$  are două unghiuri alăturate suplementare rezultă  $AB \parallel DC$ . Reciproca nu este adevărată. **92.** Utilizați teorema liniei mijlocii în triunghi și faptul că diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc. **93. a)** Dacă  $AB \parallel CD$ , se notează  $AC \cap MN = \{E\}$  și se demonstrează că segmentele  $ME$  și  $NE$  sunt linii mijlocii în  $\triangle ADC$  și, respectiv,  $\triangle ABC$ . Reciproc, se consideră  $E$  mijlocul segmentului  $AC$  și se folosește că segmentele  $ME$  și  $NE$  sunt linii mijlocii, după care se pune în evidență că  $M, E, N$  sunt coliniare din relația  $ME + EN = MN$ . **b)**  $AB \parallel CD, AD \equiv BC \Rightarrow ABCD$  trapez isoscel. Se consideră

$$P, Q \text{ mijloacele lui } AB \text{ respectiv, } CD \text{ de unde, } PQ \text{ înălțime în trapez. } \mathcal{A}_{ABCD} = MN^2 \text{ și } MN = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow MN \equiv PQ$ , deci  $MNPQ$  este dreptunghi de unde,  $MP \perp PN$  și  $AC \perp BD$ . **94. a)**  $\angle ACD \equiv \angle BDC$  implică  $\triangle OCD$  isoscel, de unde  $OC \equiv OD$ , **(1)**. Deoarece  $AB \parallel CD$  avem că  $\angle ACD \equiv \angle BAC \equiv \angle BDC \equiv \angle ABD$  (alterne interne). Cum  $\angle ACD \equiv \angle BDC$ , rezultă că  $\triangle OAB$  este isoscel și  $OA \equiv OB$ , **(2)** Din **(1)** și **(2)**, rezultă că  $OC + OA = OD + OB$  și atunci  $AC = BD$  iar trapezul  $ABCD$  va fi isoscel. (fig. 193)

**b)** În  $\triangle ABC$ ,  $BO$  și  $AE$  ( $AD' \cap BC = \{E\}$ ) sunt înălțimi, de unde rezultă că  $D'$  este ortocentrul lui și, deci,  $CD' \perp AB$ . Cum segmentul  $AB \parallel CD$ , rezultă că  $CD' \perp CD$ , adică  $\triangle CDD'$  este dreptunghic în  $C$ . Cum  $CO$  este mediana corespunzătoare ipotenuzei  $DD'$ , avem  $CO = \frac{DD'}{2} = DO$ , căci  $D'$  este simetricul lui  $D$  față de  $O$ . Din  $CO = DO$  rezultă că  $\triangle OCD$  este isoscel și  $\angle ACD \equiv \angle BDC$ , de unde conform punctului **a)**,  $ABCD$  este trapez isoscel.

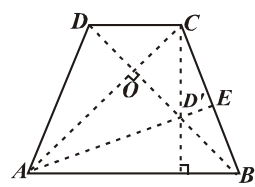


Fig. 193