Coordonator
GHEORGHE BOROICA

Nicolae Muşuroia Gheorghe Boroica

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi
centre de excelenţă

Clasa a XII-a

Volumul II. Analiză matematică

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

Cuvânt-înainte

Colecţia „Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă" conţine şase volume pentru liceu, destinate fiecărui an de studiu, şi se adresează tuturor pasionaţilor de matematică, de orice vârstă. Ea vine să umple un gol care există de ani de zile, cu toată inflaţia de publicaţii matematice din ultima vreme. Demersul nostru aduce îmbunătăţiri substanţiale ciclului de manuale pentru grupele de performanţă pe care le-am elaborat în anul 2003, în cadrul unui colectiv care a materializat un proiect finanţat din fonduri europene. Temele abordate în cărţile actuale tratează atât cunoştinţele din programele şcolare, necesare elevilor pentru reuşita la examenele de admitere la cele mai prestigioase universităţi din ţară şi de peste hotare, cât şi pe toate cele prezente în programa elaborată de minister pentru pregătirea olimpiadelor judeţene şi naţionale de matematică. În plus, în multe dintre capitole există şi paragrafe sau probleme care pot fi utilizate cu succes şi de către elevii care se pregătesc pentru concursurile internaţionale de matematică. De aceea, această colecţie reprezintă un adevărat îndrumar pentru elevii şi profesorii care activează în cadrul centrelor de excelenţă, atât prin conţinuturi, cât şi prin modalitatea de prezentare. Vastitatea informaţiilor pe care le-am considerat necesare unei pregătiri *de excelenţă*, precum şi relativa independenţă a unora dintre temele alese, ne-au făcut ca la clasele a XI-a şi a XII-a să elaborăm câte două cărţi distincte: *Algebră* şi *Analiză matematică*.

Materialul suplimentar este prezentat complet din punct de vedere teoretic şi este urmat de multe exemple, probleme (grupate, după dificultate, în două categorii) şi teste de evaluare, care ilustrează noţiunile şi tehnicile de lucru abordate şi îl conduc pe cititor spre o mai bună înţelegere şi încadrare în sistem a cunoştinţelor pe care le are din manualele şcolare. Sperăm ca testele iniţiale, prezente la începutul fiecărei cărţi, precum şi cele finale să fie utile pentru o evaluare cât mai exactă a progresului elevilor. Mai mult decât atât, prin frumuseţea problemelor alese (unele dintre ele sunt adevărate bijuterii matematice), prin ingeniozitatea abordărilor, prin explicaţiile şi comentariile detaliate pe marginea acestora, sperăm ca aceste cărţi să contribuie la consolidarea unei gândiri matematice creative a tinerilor cititori, care să treacă dincolo de şabloane.

Dorim ca această colecţie să reprezinte o adevărată pledoarie pentru MATEMATICĂ.

Autorii

CUPRINS

CAPITOLUL 1. FUNCŢII PRIMITIVABILE

Conceptul de primitivă a apărut în ştiinţă din nevoia de a cerceta comportarea globală a fenomenelor naturale descrise de unele funcţii având variaţie locală cunoscută.

Problemele concrete de fizică, chimie, biologie, geometrie – mai ales acelea care admit o modelare diferenţială – au impulsionat conturarea treptată a noţiunii de primitivă şi de integrală definită.

1.1. Definiţie. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval neredus la un singur punct (J e interval nedegenerat). O funcţie $F : J \to \mathbb{R}$ se numeşte *primitivă* pe J a unei funcţii $f : J \to \mathbb{R}$ dacă F este derivabilă pe J şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in J$. Când punctul x din această definiţie este o extremitate a lui J, prin $F'(x)$ se notează derivata laterală a lui F în punctul x.

Se spune că o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ admite primitive pe J (f este primitivabilă pe J sau f este o derivată) dacă există o primitivă a lui f pe J.

Noţiunea de primitivă a fost introdusă de I. Newton (1665) sub denumirea de *fluentă*.

1.2. Observaţie. Notăm în continuare cu $P(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor primitivabile pe J, cu $C(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue pe J şi cu $\mathcal{D}_a(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor ce au proprietatea lui Darboux pe J, J fiind un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

Notăm în continuare cu J un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

1.3. Propoziţie. Dacă funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F pe J, atunci restricţia lui F la orice interval nedegenerat $I \subset J$ este o primitivă a restricţiei lui f la I.

1.4. Propoziţie. Dacă F şi G sunt două primitive ale aceleiaşi funcţii $f : J \to \mathbb{R}$, atunci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) - G(x) = k,\ \forall\, x \in J.$$

1.5. Teoremă. Dacă funcţia f este continuă pe intervalul nedegenerat J, atunci f are primitive pe J.

1.6. Observaţie. Din teorema anterioară rezultă că $C(J) \subset P(J)$. Facem precizarea că relaţia $P(J) \subset C(J)$ nu este în general adevărată, după cum se va putea observa din exemplul următor. Teorema anterioară se mai numeşte şi teorema fundamentală a calculului diferenţial şi integral.

CAPITOLUL 2. CRITERII DE INTEGRABILITATE

I. FUNCŢII INTEGRABILE

Amintim câteva rezultate teoretice referitoare la funcţiile integrabile.
Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, iar $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie dată.

2.1. Definiţie. Se numeşte diviziune a intervalului $[a, b]$ orice sistem ordonat $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ de $n+1$ puncte cu proprietatea că:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci numărul $\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ se numeşte norma diviziunii Δ. Notăm cu $\mathcal{D}[a, b]$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

2.2. Definiţie. Fie $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{D}[a, b]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ un sistem de puncte intermediare, unde $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Numărul real $\sigma(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ se numeşte suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

2.3. Definiţie. Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$, dacă pentru orice şir de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i^n, $x_{i-1}^n \le \xi_i^n \le x_i^n, 1 \le i \le k_n$, şirul sumelor Riemann $\left(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)\right)_{n\ge1}$ este convergent la acelaşi număr I_f. Numărul real I_f se numeşte integrala definită a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx$. Aşadar, $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n) = \int_a^b f(x)dx$.

2.4. Teoremă. Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci funcţia f este mărginită.

2.5. Consecinţă. O funcţie care nu este mărginită pe $[a, b]$ nu este integrabilă pe $[a, b]$.

CAPITOLUL 6. TEHNICI DE CALCUL AL UNOR INTEGRALE

În acest capitol vom pune în evidenţă câteva dintre tehnicile mai des întâlnite pentru calculul unor primitive şi integrale definite. Acestea se bazează pe următoarele teoreme.

6.1. Teoremă (Metoda integrării prin părţi). Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile cu derivatele continue pe intervalul I, atunci:
a) funcţiile $f \cdot g$, $f' \cdot g$, $f \cdot g'$ admit primitive şi

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx;$$

b) $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

6.2. Teoremă (Prima metodă de schimbare de variabilă pentru primitive)
Fie I, J intervale. Dacă:
a) $\varphi : I \to J$ este derivabilă;
b) $h : J \to \mathbb{R}$ admite primitiva H,
atunci funcţia $(h \circ \varphi) \cdot \varphi' : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I şi

$$\int h(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = H(\varphi(x)) + \mathcal{C}.$$

6.3. Teoremă (Prima metodă de schimbare de variabilă pentru integrala definită)
Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă:
a) $\varphi : [a, b] \to J$ este derivabilă cu φ' continuă pe $[a, b]$;
b) $f : J \to \mathbb{R}$ este continuă pe J,
atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

6.4. Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă pentru primitive)
Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$, iar $f : I \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : J \to I$ două funcţii. Dacă:
a) funcţia φ este bijectivă, derivabilă şi $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in J$;
b) funcţia $h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive pe J,
atunci funcţia f admite primitive şi

$$\int f(x)\,dx = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C},$$

unde H este o primitivă pentru h.

TESTE FINALE

TESTUL F.1

F.1.1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,f(x)\,dx = 0$. Arătaţi că ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (0, 1).

Cezar Lupu, Gazeta Matematică 5/2011

F.1.2. Decideţi dacă există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să verifice una dintre condiţiile:

a) $F\big(f(x)\big) = 2x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $F\big(f(x)\big) = 3x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Vasile Pop

F.1.3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arătaţi că orice funcţie bijectivă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nu are primitive şi nu e integrabilă.

F.1.4. Fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, descrescătoare, cu $f(\pi) = 0$ şi F o primitivă a sa. Arătaţi că $\int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos x\,dx \le 0$.

Cristinel Mortici

TESTUL F.2

F.2.1. Fie funcţia continuă $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Arătaţi că ecuaţia $2x - 1 = \int_0^x f(t)\,dt$ are o unică soluţie în intervalul [0, 1].

F.2.2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât:
$f(x^2) + f(y^2) \le 2 \cdot f\left(\sqrt{x \cdot y}\right)$, $x, y \in [0, 1]$. Arătaţi că $f(1) - f\left(\frac{1}{e}\right) \le \int_0^1 \sqrt{x} \cdot f'(x)\,dx$.

Mihaly Bencze

F.2.3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisface condiţiile:

a) $f \circ f$ are primitive;

b) $\left|f(x) - f(y)\right| \ge |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Arătaţi că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.