Coordonator
DANA HEUBERGER

Dana Heuberger

Vasile Pop

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a XII-a

Volumul I: ALGEBRĂ

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

Cuvânt-înainte

Colecţia „Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă” conţine şase volume pentru liceu, destinate fiecărui an de studiu, şi se adresează tuturor pasionaţilor de matematică, de orice vârstă. Ea vine să umple un gol care există de ani de zile, cu toată inflaţia de publicaţii matematice din ultima vreme. Demersul nostru aduce îmbunătăţiri substanţiale ciclului de manuale pentru grupele de performanţă pe care le-am elaborat în anul 2003, în cadrul unui colectiv care a materializat un proiect finanţat din fonduri europene. Temele abordate în cărţile actuale tratează atât cunoştinţele din programele şcolare, necesare elevilor pentru reuşita la examenele de admitere la cele mai prestigioase universităţi din ţară şi de peste hotare, cât şi pe toate cele prezente în programa elaborată de minister pentru pregătirea olimpiadelor judeţene şi naţionale de matematică. În plus, în multe dintre capitole există şi paragrafe sau probleme care pot fi utilizate cu succes şi de către elevii care se pregătesc pentru concursurile internaţionale de matematică. De aceea, această colecţie reprezintă un adevărat îndrumar pentru elevii şi profesorii care activează în cadrul centrelor de excelenţă, atât prin conţinuturi cât şi prin modalitatea de prezentare. Vastitatea informaţiilor pe care le-am considerat necesare unei pregătiri *de excelenţă*, precum şi relativa independenţă a unora dintre temele alese, ne-au făcut ca la clasele a XI-a şi a XII-a să elaborăm câte două cărţi distincte: *Algebră* şi *Analiză matematică*.

Materialul suplimentar este prezentat complet din punct de vedere teoretic şi este urmat de multe exemple, probleme (grupate, după dificultate, în două categorii) şi teste de evaluare, care ilustrează noţiunile şi tehnicile de lucru abordate şi îl conduc pe cititor spre o mai bună înţelegere şi încadrare în sistem a cunoştinţelor pe care le are din manualele şcolare. Sperăm ca testele iniţiale, prezente la începutul fiecărei cărţi, precum şi cele finale, să fie utile pentru o evaluare cât mai exactă a progresului elevilor. Mai mult decât atât, prin frumuseţea problemelor alese (unele dintre ele sunt adevărate bijuterii matematice), prin ingeniozitatea abordărilor, prin explicaţiile şi comentariile detaliate pe marginea acestora, sperăm ca aceste cărţi să contribuie la consolidarea unei gândiri matematice creative a tinerilor cititori, care să treacă dincolo de şabloane.

Dorim ca această colecţie să reprezinte o adevărată pledoarie pentru MATEMATICĂ.

Autorii

CUPRINS

CAPITOLUL 1. ORDINUL UNUI ELEMENT AL UNUI GRUP

Conceptul modern de grup abstract s-a dezvoltat începând cu secolul al XIX-lea, pornind de la cercetările matematicianului francez Évariste Galois, care a dat un criteriu pentru existenţa soluţiilor unei anume ecuaţii polinomiale în termeni de grup de simetrie al rădăcinilor polinomului. Elementele grupului lui Galois corespund unor anumite permutări ale rădăcinilor polinomului. Noţiunile legate de grupuri şi de structurile algebrice s-au îmbogăţit datorită aplicabilităţii lor în domenii dintre cele mai variate, atât matematice, cât şi nematematice (în teoria relativităţii restrânse din fizică, în fenomene de simetrie din chimia moleculară, în teoria numerelor, în geometria clasică, în cea hiperbolică şi în cea proiectivă, printre altele) şi au ajuns să ajute la dezvoltarea domeniilor respective. Aceasta, datorită faptului că o organizare coerentă a proprietăţilor unor legi de compoziţie interne (operaţii algebrice), fără să ţinem seama de caracteristicile specifice ale operaţiilor şi de natura concretă a mulţimilor pe care sunt definite, permite utilizarea lor într-o manieră flexibilă şi evidenţierea acelor proprietăţi general valabile care le valorifică potenţialul şi particularităţile.

În teoria grupurilor, un rol important îl joacă ordinul unui element al unui grup şi proprietăţile pe care acesta le generează. Le vom evidenţia în continuare pe cele mai importante.

Considerăm cunoscute noţiunile fundamentale studiate în liceu (grup, subgrup, morfisme de grupuri). În cele ce urmează, G este o mulţime nevidă, care are structură de grup în raport cu o lege de compoziţie notată multiplicativ. Ordinul grupului G, notat cu $\operatorname{ord}(G)$ sau cu $|G|$, este egal cu numărul elementelor grupului G, dacă G are un număr finit de elemente şi este egal cu $+\infty$, dacă G are o infinitate de elemente.

1.1. Propoziţie. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi X o submulţime nevidă a sa.

Notăm $\langle X\rangle=\bigcap\left\{H \mid X\subseteq H, H \text{ subgrup al lui } G\right\}$.

Atunci, $(\langle X\rangle,\cdot)$ este un subgrup al lui G (numit *subgrupul generat* de mulţimea X).

1.2. Observaţie.

a) $\langle X\rangle$ este cel mai mic subgrup (în raport cu relaţia de ordine „$\subseteq$”) al lui G, care conţine mulţimea X.

b) $\langle X\rangle=\left\{\alpha\in G \mid \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \exists x_1,x_2,\ldots,x_n\in G,\ \exists k_1,k_2,\ldots,k_n\in\mathbb{Z},\ \alpha=x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}\right\}$,

adică subgrupul generat de X este mulţimea tuturor produselor finite de puteri întregi ale elementelor mulţimii.

c) Dacă $x\in G$, atunci subgrupul generat de elementul x este $\langle x\rangle=\left\{x^k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

CAPITOLUL 2. APLICAŢII ALE TEOREMELOR LUI LAGRANGE ŞI CAUCHY

Teoremele lui Lagrange şi Cauchy sunt două dintre cele mai importante teoreme de teoria grupurilor. Cu ajutorul lor vom afla, în prima parte a capitolului, mai multe informaţii despre ordinele elementelor şi subgrupurilor unui grup oarecare, nu neapărat comutativ. În cea de-a doua parte a capitolului, vom revedea teoremele lui Euler, Fermat şi Wilson, întâlnite anterior ca instrumente puternice de lucru în teoria numerelor. Le vom demonstra, folosind limbajul structurilor algebrice, şi le vom aplica apoi în probleme de concurs dintre cele mai variate.

2.1. TEOREMELE LUI LAGRANGE ŞI CAUCHY ÎN TEORIA GRUPURILOR

2.1.1. Definiţie. Fie H un subgrup al grupului $(G,\cdot)$. Se definesc relaţiile de echivalenţă ρ_H, ρ'_H (la stânga, respectiv la dreapta) pe G, după cum urmează:

$$x\,\rho_H\,y \Leftrightarrow x^{-1}y\in H \quad \text{şi} \quad x\,\rho'_H\,y \Leftrightarrow yx^{-1}\in H .$$

Mulţimile xH şi Hx se numesc *clasa de echivalenţă la stânga*, respectiv *la dreapta* a lui x în raport cu H, deoarece:

$$y\in xH \Leftrightarrow \exists\, h\in H,\ y=xh \Leftrightarrow x^{-1}y\in H \Leftrightarrow x\,\rho_H\,y$$

şi $$y\in Hx \Leftrightarrow \exists\, h\in H,\ y=hx \Leftrightarrow yx^{-1}\in H \Leftrightarrow x\,\rho'_H\,y$$

Mulţimile $G/\rho_H=\{H,xH,yH,\dots\}$ şi $G/\rho'_H=\{H,Hx,Hy,\dots\}$ se numesc *mulţimile claselor de echivalenţă* la stânga, respectiv *la dreapta* în raport cu H.
Mulţimea $I\subset G$ se numeşte *sistem de reprezentanţi* pentru ρ_H dacă I este formată din câte un reprezentant al fiecărei clase de echivalenţă.

2.1.2. Observaţii.

1) Ca de obicei, dacă $(G,\cdot)$ este un semigrup (adică operaţia este o lege de compoziţie asociativă pe G), $H\neq\varnothing$ este o submulţime a lui G şi $a\in G$, am notat $aH=\{ah \mid h\in H\}\subset G$ şi $Ha=\{ha \mid h\in H\}\subset G$.

2) Funcţia $f:G/\rho_H\to G/\rho'_H$, $f(xH)=Hx^{-1}$ este bijectivă, iar

$$|G/\rho_H|=|G/\rho'_H|\overset{not}{=}[G:H]$$

şi se numeşte *indicele* subgrupului H în grupul G.

3) $xH\cap yH\neq\varnothing \Leftrightarrow xH=yH$.

Într-adevăr, dacă $a\in xH\cap yH$, atunci $\exists\, h_1,h_2\in H$, astfel încât $a=xh_1=yh_2$.
Atunci, $x=yh_2h_1^{-1}$ şi cum $h_2h_1^{-1}\in H$, rezultă că $x\in yH$, aşadar $xH\subseteq yH$.
Incluziunea cealaltă se demonstrează analog.

CAPITOLUL 6. INELE

Considerăm cunoscute toate noţiunile şi proprietăţile referitoare la inele şi corpuri din programa şcolară. Inelele cu care vom lucra sunt peste tot în această carte, ca în materia de liceu, inele unitare, iar morfismele de inele (şi corpuri) sunt morfisme unitare de inele (corpuri) unitare. Elementele neutre faţă de adunare, respectiv înmulţire ale inelului $(A,+,\cdot)$ sunt notate, ca de obicei, cu 0, respectiv 1.

CENTRUL UNUI INEL

Multe din problemele de concurs cu structuri algebrice conţin condiţii ce asigură comutativitatea unui grup sau a unui inel. Deseori, noţiunile de centru al unui grup şi centru al unui inel sunt instrumente eficiente de lucru în cazul unor astfel de probleme.

6.1. Definiţie. Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Mulţimea $Z(A)=\{x\in A \mid x\cdot y=y\cdot x, \forall\, y\in A\}$ se numeşte *centrul* inelului A.

6.2. Observaţie. Fie inelul $(A,+,\cdot)$.

a) $Z(A)\neq\varnothing$ $(1\in Z(A))$.

b) Notând $k=k\cdot 1=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{ ori}}\in A$ pentru $k\in\mathbb{N}^*$ şi $k=k\cdot 1=-(-k)\in A$ pentru $k\in\mathbb{Z}_-$, avem că $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, $k\in \mathrm{Z}(A)$.

c) Inelul $(A,+,\cdot)$ este comutativ $\Leftrightarrow$ $A=\mathrm{Z}(A)$.

6.3. Propoziţie. Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Atunci:

a) Centrul $Z(A)$ al inelului este un subgrup al grupului aditiv $(A,+)$.

b) Fie inelul $(B,+,\cdot)$. Atunci, dacă $A\simeq B$, avem $\mathrm{Z}(A)\simeq\mathrm{Z}(B)$.

c) Dacă A este comutativ, atunci $Z(\mathcal{M}_n(A))=\{a\cdot I_n \mid a\in A\}$ şi $A\simeq Z(\mathcal{M}_n(A))$.

6.4. Definiţie. Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Spunem că $a\in A$ este *nilpotent*, dacă există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $a^p=0$.

6.5. Lemă. Fie corpul comutativ $(K,+,\cdot)$, $m\in\mathbb{N}^*$ şi $A\in\mathcal{M}_m(K)$ o matrice nilpotentă. Atunci $A^m=O_m$.

TESTE FINALE

TESTUL F.1

F.1.1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu un număr impar de elemente şi $H \subset G$, $H \neq G$ un subgrup al său. Arătaţi că:
a) $a \in H$ dacă şi numai dacă $a^2 \in H$;
b) există $a \in G \setminus H$ şi $b \in G \setminus H$ astfel încât $a \cdot b \in G \setminus H$.

Marian Andronache

F.1.2. Se ştie că într-un grup cu n elemente există două elemente având ordinele p, respectiv q, cu $p, q \geq 2$ şi $(p, q) = 1$. Determinaţi n astfel încât $p + q \geq n - 1$.

F.1.3. Fie R un inel şi numărul natural $n > 2$. Presupunem că $\forall\, x \in R,\ x^n = x$. Arătaţi că $\forall\, x, y \in R,\ x \cdot y^{n-1} = y^{n-1} \cdot x$.

Concurs „Vojtech Jarnik”, 2001

TESTUL F.2

F.2.1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit necomutativ şi H un subgrup propriu al său cu proprietatea că toate elementele din $G \setminus H$ au ordinul 2. Arătaţi că:
a) H este comutativ;
b) $|G| = 2 \cdot |H|$.

F.2.2. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(0), f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte modulo 4. Arătaţi că $f(0), f(1), \ldots, f(7)$ sunt distincte modulo 8.

Vasile Pop,
(adaptare Putnam)

F.2.3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit în care mulţimile $C(a) = \{x \in G \mid a \cdot x = x \cdot a\}$ au acelaşi cardinal, pentru orice $a \in G \setminus \{e\}$. Demonstraţi că grupul este abelian.

Marian Andronache,
Gazeta Matematică 11 / 2013

TESTUL F.3

F.3.1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $M \subset G$, $M \neq \varnothing$, $M \neq G$. Demonstraţi că pentru orice $a \in G$, există $b \in G$ astfel încât $a \notin \{b \cdot y \mid y \in M\}$.

F.3.2. Fie $(G,\cdot)$ un grup de ordin p^m, unde $m \in \mathbb{N}^*$ şi p este un număr prim. Arătaţi că numărul elementelor centrului său este un multiplu nenul al lui p.