LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR **OVIDIU BĂDESCU**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a XII-a

Cu 10 teste pentru bacalaureat după modelul M.E.N.C.S.

consolidare

Ediţia a II-a

Prefaţă

Această nouă lucrare încheie un ciclu, fiind continuarea firească a celor pentru primele trei clase de liceu şi, aşa cum poate se citeşte printre rânduri, a fost scrisă cu suflet şi trudă, din dorinţa de a oferi tuturor elevilor de clasa a XII-a (şi nu numai), o colecţie de probleme şi exerciţii utile. Acestea au constituit în ultimii 28 de ani subiecte la lucrări scrise, chestiuni mai simple sau un pic mai problematice în încercările la tablă, toate propuse elevilor lor de către autori. În mare măsură, cartea este de fapt o culegere de autor, asemenea multora pe care le au unii dintre colegi în geantă, prin dosare şi caiete muncite cu atâtea generaţii.

Majoritatea problemelor au răspunsuri sau idei, sau chiar soluţii detaliate, acolo unde am considerat că este cazul. Invităm elevii să consulte rezolvările, aceasta evident după ce au încercat singuri lupta cu chestiunile propuse, măcar pentru verificare sau pentru a găsi noi idei.

Revenind la resorturile intime care au dus la redactarea acestei lucrări, credem că nu greşim dacă reamintim tuturor că, aproape zilnic, trebuie să „rezolvăm o problemă”, să luăm cel puţin o decizie. A găsi soluţia, calea cea bună, înseamnă a gândi. Matematica şcolară ar trebui astfel, în primul rând, să înveţe tinerii să gândească. Nu în ultimul rând, frumuseţea raţionamentului matematic, tehnicile specifice de lucru ar trebui să deschidă larg poarta spre diverse domenii ale ştiinţei, spre artă şi viaţa cotidiană. Elevii, şi nu numai ei, trebuie să simtă că matematica şi comorile ei le sunt şi le vor fi utile azi şi mai ales mâine; evident, asta nu e deloc uşor realizabil, mai ales că, faţă de alte discipline, matematica este, vrem, nu vrem, mai abstractă. Am încercat totuşi să păstrăm un echilibru între noţiuni şi aplicaţii, din dorinţa şi necesitatea de a prezenta, pe cât posibil, o matematică mai atractivă. Apropierea orelor de matematică de tot ceea ce ne înconjoară, de viaţa de zi cu zi, nu credem că e posibilă permanent şi continuu; poate mai important e să facem orele plăcute şi atractive prin atmosfera creată, prin căldura transmisă, prin cultivarea dialogului, prin crearea unor situaţii afective pozitive.

Trebuie să subliniem că prezenta culegere se adresează tuturor elevilor de clasa a XII-a, aproape indiferent de profil şi filieră. Nivelul de aptitudini, cunoştinţe şi tehnici diferă de la o clasă la alta, de la un colectiv la altul; credem că rolul profesorului este şi acela de a selecta ceea ce este potrivit pentru elevii săi, fără improvizaţii, pregătind cu atenţie şi rigoare orice lecţie.

Veţi remarca probabil că (la cererea publicului spectator şi câteodată performer pe scenă: elev, profesor...) am renunţat la câte ceva şi am inserat şi câteva (destule credem) modele de teste tip bacalaureat. (Dacă ar fi după noi, am mai spus-o, am oferi candidaţilor, la examen, o listă cu, să zicem, 20 de formule... Ne interesează cum ştiu să opereze cu ele, nu să le aibă stocate în memorie, chinuindu-i... După ce vor pleca de pe băncile liceului, aplecaţi asupra oricărei profesii, elevii vor cam avea acces la o bază de date imensă... Ideea e să îi învăţăm cum să o folosească.)

Mulţumim tuturor colegilor şi prietenilor care, într-un fel sau altul, ne-au ajutat şi susţinut în demersul personal didactic în timp şi, nu în ultimul rând, elevilor noştri, care au întrebat, au rezolvat, au corectat, au sugerat.

Evident, ca orice încercare omenească, cartea este perfectibilă. Aşteptăm aşadar sugestii, observaţii, comentarii binevoitoare.

Autorii

CAPITOLUL I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ

1.1. Grupuri

1.1.1. Legi de compoziţie

Breviar teoretic

● **Lege de compoziţie internă (operaţie algebrică)**
Dacă M este o mulţime nevidă, atunci se numeşte lege de compoziţie (internă) pe M orice funcţie $f : M \times M \to M$; dacă (pentru uşurinţa scrierii) în locul lui f se alege un simbol, de exemplu „$*$”, atunci aceasta este lege de compoziţie (internă) pe M dacă pentru orice două elemente x şi y ale mulţimii M avem că şi $x * y$ este tot un element al mulţimii M. Formalizat, aceasta se traduce prin: $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$.
○ Remarcă: Se mai spune, în aceste condiţii, că **operaţia „$*$”** este lege de compoziţie pe mulţimea M.
○ Observaţie: Pentru a arăta că o lege nu este internă, e suficient să găsim două elemente $x, y \in M$ pentru care $x * y \notin M$.

● $H \subset M \neq \varnothing$ **este parte stabilă a lui M în raport cu legea „$*$”** dacă:
1) $H \neq \varnothing$;
2) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

● **Tabla unei operaţii**
Dacă „$*$” este o lege de compoziţie pe o mulţime finită $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi numărul elementelor acesteia este suficient de mic, se poate alcătui un tabel al compunerii oricăror două elemente:

$*$	a_1	a_2	....	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	....	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$		$a_2 * a_n$
…	……..	……	……………	……
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$		$a_n * a_n$

● **Proprietăţi ale legilor de compoziţie**
Dacă „$*$” este o lege de compoziţie pe $M \neq \varnothing$, atunci:
○ legea este asociativă dacă $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall x, y, z \in M$
○ legea este comutativă dacă $x * y = y * x,\ \forall x, y \in M$
○ legea are (admite) element neutru dacă $\exists e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x,\ \forall x \in M$

○ dacă legea admite şi element neutru, notat cu e, atunci un element $x \in M$ se numeşte simetrizabil dacă $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

○ Observaţia 1: Dacă „$*$" este o lege de compoziţie asociativă pe M şi dacă „$*$" este internă pe $H \subset M$, atunci „$*$" este asociativă şi pe H (proprietatea de ereditate).

○ Observaţia 2: Dacă „$*$" este o lege de compoziţie comutativă pe M şi dacă „$*$" este internă pe $H \subset M$, atunci „$*$" este comutativă şi pe H.

○ Observaţia 3: Dacă o lege de compoziţie „$*$" are elementul neutru e pe $M \neq \varnothing$, atunci e este unicul cu această proprietate (încercaţi să demonstraţi această afirmaţie!).

○ Observaţia 4: Dacă „$*$" are elementul neutru $e \in M$ şi dacă acest element neutru aparţine lui $H \subset M$, atunci e este element neutru pentru legea „$*$" pe H.

○ Observaţia 5: Dacă x admite simetric pe x' în raport cu legea „$*$" pe M şi dacă $x' \in H \subset M$, atunci x' este simetricul lui x şi pe mulţimea H.

○ Observaţia 6: Mulţimea elementelor simetrizabile ale mulţimii M în raport cu legea de compoziţie „$*$" se notează cu $U(M)$.

○ Observaţia 7: $U(M)$ este parte stabilă a lui M în raport cu legea „$*$" şi

$$(x * y)' = y' * x', \ \forall x, y \in U(M).$$

Exerciţii şi probleme de consolidare

1. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

c) înmulţirea pe $M = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

d) înmulţirea pe $M = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

e) înmulţirea pe $M = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

f) înmulţirea pe $M = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Stabiliţi care dintre următoarele operaţii **nu** sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) adunarea pe $M = \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

b) adunarea pe $M = \{5p \mid p \in \mathbb{Z}\}$;

c) adunarea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

d) înmulţirea pe $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

e) scăderea pe $M = \mathbb{N}$;

f) adunarea pe $M = \{7p \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

3. Din nou: stabiliţi care dintre următoarele operaţii sunt legi de compoziţie pe mulţimea M indicată în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) înmulţirea pe $M = \{5p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\}$;

b) înmulţirea pe $M = \{-1, 0, 1\}$;

c) înmulţirea pe $M_n = \left\{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}^*\right\}, n \in \mathbb{N}^*$ fixat;

CAPITOLUL II. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.1. Primitive

2.1.1. Primitivele unei funcţii, proprietăţi

Breviar teoretic

● **Fie I un interval de numere reale. Spunem că $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitivă pe I** (notăm $f \in P_I$) dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:
a) F este derivabilă pe I.
b) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$; în această situaţie, F se numeşte primitivă pe I a funcţiei f.
○ *Observaţia 1:* Dacă f admite o primitivă, atunci f admite primitive; orice două primitive diferă printr-o constantă.
○ *Observaţia 2: Mulţimea* primitivelor funcţiei f se notează $\int f(x)dx$ şi se numeşte integrala nedefinită a lui f.
○ *Observaţia 3:* Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f admite primitive, iar dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci f are proprietatea lui Darboux (şi deci nu are discontinuităţi de prima speţă).

● **Tabel de integrale nedefinite uzuale**

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}, \forall \alpha \neq -1$	**9)** $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}x + \mathcal{C}$
2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \forall a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$	**10)** $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}x + \mathcal{C}$
3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$	**11)** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$
4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \mathcal{C}$	**12)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \mathcal{C}$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$	**13)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + \mathcal{C}$
6) $\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$	**14)** $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}$
7) $\int \text{tg}x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \mathcal{C}$	**15)** $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}$
8) $\int \text{ctg}x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + \mathcal{C}$	

Cuprins