

Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI

**algebră
geometrie**

clasa a VII-a

ediția a V-a, revizuită

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD[®]
aprofundare



Algebră

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

PP Competențe specifice:

- Identificarea caracteristicilor numerelor raționale și a formelor de scriere a acestora în contexte variate
- Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale, a estimărilor și a aproximărilor pentru rezolvarea unor ecuații
- Utilizarea proprietăților operațiilor în efectuarea calculelor cu numere raționale
- Caracterizarea mulțimilor de numere și a relațiilor dintre acestea, utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor
- Determinarea regulilor eficiente de calcul în efectuarea operațiilor cu numere raționale
- Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale și a ordinii efectuării operațiilor

1. Mulțimea numerelor raționale (\mathbb{Q}). Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; valoarea absolută; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Compararea și ordonarea numerelor raționale

PE-PP

- Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește număr rațional.
- Un număr rațional poate fi exprimat fie printr-o fracție ordinară, $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, fie printr-o fracție zecimală finită sau periodică (câtuș dintre a și b).
- Notăm cu \mathbb{Q} mulțimea numerelor raționale.
- $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
- Opusul unui număr rațional r este numărul $-r$.
- Distanța măsurată pe axa numerelor, între origine și punctul corespunzător numărului rațional r , se numește modulul numărului r și se notează $|r|$.

Capitolul V. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

PP Competențe specifice:

- Identificarea unor corespondențe între diferite reprezentări ale aceluiași date
- Reprezentarea unor date sub formă de grafice, tabele sau diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora
- Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin dependențe funcționale sau calculul probabilităților
- Caracterizarea și descrierea unor elemente geometrice într-un sistem de axe ortogonale
- Analizarea unor situații practice cu ajutorul elementelor de organizare a datelor
- Transpunerea unei relații dintr-o formă în alta

1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere întregi

PE-PP

Dacă A și B sunt două mulțimi (nevide), atunci produsul lor cartezian (în această ordine) este mulțimea perechilor ordonate (a, b) , unde $a \in A$ și $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Probleme rezolvate

PE 1^R Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x + 3 \leq 2\}$. Determinați $A \times B$.

Rezolvare: Deoarece $A = \{-1, 0, 1\}$ și $B = \{-2, -1\}$, rezultă că $A \times B = \{(-1, -2); (-1, -1); (0, -2); (0, -1); (1, -2); (1, -1)\}$.

PE 2^R a) Dacă mulțimea A are 2 elemente, iar mulțimea B are 3 elemente, câte elemente are $A \times B$?

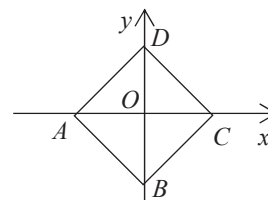
b) Dacă A are 3 elemente, iar $A \times B$ are 18 elemente, câte elemente are B ?

c) Dacă $A \times B$ are 12 elemente, câte elemente are $B \times A$?

Rezolvare: Dacă A are a elemente, iar B are b elemente, atunci $A \times B$ are ab elemente. Rezultă că: a) $A \times B$ are $2 \cdot 3 = 6$ elemente; b) B are $18 : 3 = 6$ elemente; c) $B \times A$ are $b \cdot a$ elemente, unde $a \cdot b = 12$, deci $B \times A$ are 12 elemente.

PE 3^R Un pătrat are vârfurile situate pe axele de coordonate ale reperului xOy , iar lungimea laturii este egală cu $3\sqrt{2}$. Aflați coordonatele vârfurilor pătratului.

Rezolvare: Fie $ABCD$ pătratul dat, notat ca în figură. Deoarece $AC = 6$, rezultă că $OA = OB = OC = OD = 3$ și atunci $A(-3, 0)$, $B(0, -3)$, $C(3, 0)$ și $D(0, 3)$.



Geometrie

Capitolul I. PATRULATERE

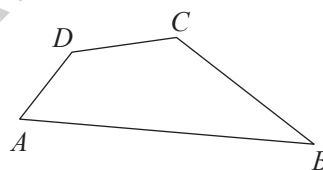
PP Competențe specifice:

- Identificarea patrulaterelor particulare utilizând proprietățile precizate
- Utilizarea proprietăților calitative și metrice ale patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
- Exprimarea prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de patrulaterare
- Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente, de măsuri de unghiuri și de arii
- Interpretarea informațiilor deduse din reprezentări geometrice în corelație cu anumite situații practice

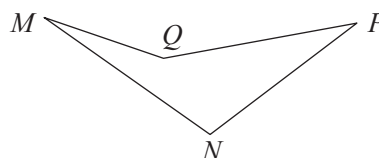
1. Patrulaterare convexe

PE-PP

1. Patrulater convex $ABCD$:



2. Patrulater concav $MNPQ$:



3. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

Probleme rezolvate

PE 1^R Andrei construiește în jurul locuinței un gard în formă de patrulater $ABCD$. Pentru aceasta pune 20 de stâlpi pe $[AB]$ și 15 stâlpi pe $[BC]$ din 2 în 2 m; 10 stâlpi pe $[CD]$ și 12 stâlpi pe $[DA]$ din 3 în 3 m (în fiecare vârf al patrulaterului este pus câte un stâlp). Care este lungimea gardului construit de Andrei?

Rezolvare: Pe latura $[AB]$ sunt puși 20 de stâlpi, deci sunt 19 distanțe de câte 2 m între doi stâlpi. Rezultă că $AB = 19 \cdot 2 \text{ m} = 38 \text{ m}$. Analog, $BC = 14 \cdot 2 \text{ m} = 28 \text{ m}$; $CD = 9 \cdot 3 \text{ m} = 27 \text{ m}$ și $DA = 11 \cdot 3 \text{ m} = 33 \text{ m}$. Lungimea gardului construit este egală cu 126 m.

Capitolul IV. CERCUL

PP Competențe specifice:

- Recunoașterea și descrierea elementelor unui cerc, într-o configurație geometrică dată
- Calcularea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate în configurații geometrice care conțin un cerc
- Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale cercului
- Exprimarea proprietăților elementelor unui cerc în limbajul matematic
- Interpretarea informațiilor conținute în probleme practice legate de cerc

1. Definiția cercului. Elemente ale cercului: centru, rază, coardă, diametru, arc. Interiorul și exteriorul cercului. Discul

PE-PP

1. Definiție. Fie O un punct în plan și r un număr real pozitiv. *Cercul cu centrul în O și raza r este mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța r față de O și se notează astfel: $\mathcal{C}(O, r)$.*

2. Definiție. Dacă M și N sunt două puncte ale unui cerc, segmentul MN se numește *coardă* (în acel cerc). O coardă care conține centrul cercului se numește *diametru* al cercului. Capetele diametrului se numesc *puncte diametral opuse*.

3. Definiție. Fie un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și A, B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Mulțimea punctelor de pe cerc, situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$, împreună cu A și B se numește *arcul mic AB* ; se notează \widehat{AB} . Mulțimea punctelor de pe cerc, situate în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$, împreună cu punctele A și B se numește *arcul mare AB* ; se notează \widehat{ACB} , unde $C \in \mathcal{C}(O, r) \cap \text{Ext}(\sphericalangle AOB)$.

Dacă A și B sunt puncte diametral opuse, atunci arcele de cerc cu extremitățile în A, B se numesc *semicercuri*.

4. Definiție. Cercurile care au raze egale se numesc *cercuri congruente*.

5. Definiție. Cercurile care au același centru se numesc *cercuri concentrice*.

6. Definiție. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea $OM < r$ se numește *interiorul cercului* și se notează astfel: $\text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.

Mulțimea punctelor N din plan cu proprietatea $ON > r$ se numește *exteriorul cercului* și se notează cu $\text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$.

7. Definiție. Fie O un punct în plan și r un număr real pozitiv. Discul cu centrul O și raza r este mulțimea $\mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ și se notează astfel: $\mathcal{D}(O, r)$.

8. Propoziție. Prin două puncte distincte, A și B , trec o infinitate de cercuri. Mulțimea centrelor acestor cercuri coincide cu mediatoarea segmentului AB .

9. Propoziție. Nu există niciun cerc care să treacă prin trei puncte coliniare.

Prin trei puncte necoliniare, A, B, C , trece un singur cerc. Centrul său este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului ABC .

Cuprins

| | |
|----------------------|---|
| TESTE INIȚIALE | 5 |
|----------------------|---|

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor raționale

| | |
|--|----|
| 1. Mulțimea numerelor raționale (\mathbb{Q}). Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; valoarea absolută; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Compararea și ordonarea numerelor raționale .. | 11 |
| 2. Operații cu numere raționale | 16 |
| a. Adunarea și scăderea numerelor raționale | 16 |
| b. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale | 18 |
| c. Puterea unui număr rațional | 20 |
| d. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor | 23 |
| 3. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$ | 27 |
| 4. Probleme rezolvate cu ajutorul ecuațiilor | 29 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 31 |
| 6. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare | 32 |

Capitolul II. Mulțimea numerelor reale

| | |
|--|----|
| 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect | 34 |
| 2. Algoritm de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural. Aproximări | 36 |
| 3. Exemple de numere iraționale. Mulțimea numerelor reale, \mathbb{R} . Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | 38 |
| 4. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări | 40 |
| 5. Modulul unui număr real. Definiție. Proprietăți | 42 |
| 6. Reguli de calcul cu radicali | 43 |
| 7. Adunarea și scăderea numerelor reale | 45 |
| 8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Raționalizarea numitorilor | 48 |
| 9. Puterea cu exponent întreg a unui număr real | 50 |
| 10. Ordinea efectuării operațiilor | 52 |
| 11. Media geometrică a două numere reale pozitive | 54 |
| 12. Recapitulare și sistematizare prin teste | 57 |
| 13. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare | 58 |

Capitolul III. Calcul algebric

| | |
|--|----|
| 1. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere: adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere, reducerea termenilor asemenea | 59 |
| 2. Formule de calcul prescurtat $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ | 64 |
| 3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R} | 67 |
| 4. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}_+$ | 72 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 74 |
| 6. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare | 75 |

Capitolul IV. Ecuații și inecuații

| | |
|--|----|
| 1. Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale | 76 |
| 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente | 78 |
| 3. Proprietăți ale relației de inegalitate „ \leq ” pe mulțimea numerelor reale | 82 |
| 4. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($<$, \leq , \geq), $a, b \in \mathbb{R}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ | 83 |
| 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor | 85 |
| 6. Recapitulare și sistematizare prin teste | 88 |
| 7. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare | 89 |

Capitolul V. Elemente de organizare a datelor

| | |
|--|----|
| 1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere întregi | 90 |
| 2. Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale. Distanța dintre două puncte din plan | 93 |
| 3. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice | 96 |

| | |
|---|-----|
| 4. Probabilitatea realizării unor evenimente | 100 |
| 5. Recapitulare și sistematizare prin teste | 102 |
| 6. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare..... | 104 |
| GEOMETRIE | |
| Capitolul I. Patrulater | |
| 1. Patrulater convexe..... | 105 |
| 2. Paralelogramul; proprietăți | 107 |
| 3. Paralelorame particulare: dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți..... | 111 |
| 4. Trapezul; clasificare. Trapez isoscel; proprietăți | 115 |
| 5. Arii | 116 |
| 6. Recapitulare și sistematizare prin teste | 121 |
| 7. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare..... | 122 |
| Capitolul II. Asemănarea triunghiurilor | |
| 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date..... | 125 |
| 2. Teorema lui Thales | 130 |
| 3. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales..... | 135 |
| 4. Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi..... | 138 |
| 5. Linia mijlocie în trapez. Proprietăți | 142 |
| 6. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării | 145 |
| 7. Criterii de asemănare a triunghiurilor | 151 |
| 8. Recapitulare și sistematizare prin teste | 155 |
| 9. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare..... | 156 |
| Capitolul III. Relații metrice în triunghiul dreptunghic | |
| 1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă | 158 |
| 2. Teorema înălțimii | 160 |
| 3. Teorema catetei | 162 |
| 4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora | 164 |
| 5. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit | 169 |
| 6. Rezolvarea triunghiului dreptunghic..... | 171 |
| 7. Recapitulare și sistematizare prin teste | 176 |
| 8. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare..... | 177 |
| Capitolul IV. Cercul | |
| 1. Definiția cercului. Elemente ale cercului: centru, rază, coardă, diametru, arc. Interiorul și exteriorul cercului. Discul | 179 |
| 2. Unghi la centru. Măsura arcelor. Arce congruente | 182 |
| 3. Coarde și arce în cerc (arcelor congruente le corespund coarde congruente și reciproc; proprietatea diametrului perpendicular pe o coardă; proprietatea arcelor cuprinse între coarde paralele; proprietatea coardelor egal depărtate de centru) | 185 |
| 4. Unghi înscris în cerc. Triunghi înscris în cerc | 188 |
| 5. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc. Triunghi circumscris unui cerc | 191 |
| 6. Poligoane regulate. Definiție. Desen | 195 |
| 7. Calculul elementelor, latură, apotemă, arie, perimetru, pentru următoarele poligoane regulate: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat | 197 |
| 8. Lungimea și aria cercului..... | 200 |
| 9. Recapitulare și sistematizare prin teste | 204 |
| 10. Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare..... | 205 |
| MODELE DE TEZE SEMESTRIALE | 207 |
| TESTE FINALE | 213 |
| INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI | 217 |
| BIBLIOGRAFIE | 269 |