Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 7 / Ion Tudor. – Ed. a 7-a. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3893-9
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3922-6

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tipărit la R.A. „Monitorul Oficial"

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a VII-a

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

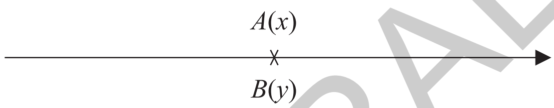
Capitolul II

ECUAȚII ŞI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc şi rețin

Numerele reale x şi y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci şi $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ şi $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității acelaşi termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu acelaşi factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ şi $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ şi $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiție: O egalitate care conține una sau mai multe variabile şi care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numeşte **identitate**.

Cum se aplică?

1. Ştiind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$. Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐

c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐

c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc şi reţin

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $x \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă

$au + b = 0$ (u verifică ecuaţia).

A rezolva ecuaţia (1) înseamnă a determina **mulţimea de soluţii**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiţie: Două ecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Pentru a rezolva ecuaţia (1) putem folosi proprietăţile relaţiei de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluţie:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \dfrac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\dfrac{35^{(5}}{20} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\dfrac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluţie:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 2 - 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{6^{(3}}{9}x = \dfrac{5^{(5}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} : \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie:

$\dfrac{^{6)}3x}{5} - \dfrac{^{15)}1}{2} = \dfrac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \dfrac{35^{(5}}{-10} \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Verificaţi dacă numărul real 4 este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + 37 = 41$; ☐ b) $3x - 2 = 10$; ☐ c) $x : (-2) = 2$. ☐

b)

2. Verificaţi dacă numărul real $\frac{1}{2}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + \frac{3}{2} = 2$; ☐ b) $1{,}5 - x = 1$; ☐ c) $2\frac{1}{2} + x = 2$. ☐

b)

c)

3. Verificaţi dacă numărul real $\sqrt{3}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $\sqrt{3}\,x + 2 = 0$; ☐ b) $x : \sqrt{3} + 3 = 4$; ☐ c) $\sqrt{6}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. ☐

c)

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $8x = 4$; b) $6x = 9$; c) $4x = 6$; d) $6x = 2$;
e) $-10x = 15$; f) $18x = -12$; g) $-14x = -8$; h) $-15x = -9$.

c)

h)

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $x + 7 = 11$; b) $x - 8 = 10$; c) $x + 4 = 17$; d) $x - 5 = 14$;
e) $15 + x = 8$; f) $x - 2 = -7$; g) $x + 31 = 9$; h) $x - 6 = -5$.

Lecţia 4. Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Citesc şi reţin

Definiţie:

O ecuaţie de forma $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ (1) se numeşte **ecuaţie liniară cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă $au + bv + c = 0$ (u şi v verifică ecuaţia). Ecuaţia (1) are o infinitate de soluţii.

Definiţie:

Ansamblul a două ecuaţii liniare cu două necunoscute x şi y, scris sub forma:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (2), se numeşte **sistem de două ecuaţii cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a sistemului** (2), dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ şi $a_2u + b_2u + c_2 = 0$.

A rezolva sistemul de ecuaţii (2) înseamnă a determina mulţimea soluţiilor sale. Mulţimea soluţiilor unui sistem se notează cu S.

Mulţimea soluţiilor S ale sistemului de ecuaţii (2) este intersecţia mulţimilor de soluţii ale ecuaţiilor componente.

Definiţie:

Două sisteme de ecuaţii se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

A. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda substituţiei

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda substituţiei sunt:

– exprimarea uneia dintre necunoscute dintr-o ecuaţie în funcţie de cealaltă necunoscută;
– substituirea necunoscutei respective în cealaltă ecuaţie a sistemului, care devine astfel o ecuaţie cu o singură necunoscută;
– rezolvarea ecuaţiei cu o necunoscută;
– aflarea celeilalte necunoscute şi determinarea mulţimii soluţiilor sistemului.

Cum se aplică?

1. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} x = 7y \\ 2x - y = 13 \end{cases}$.

Soluție:

$\begin{cases} x = 7y \\ 2 \cdot 7y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 14y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 13y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$, deci $S =$ $= \{(7; 1)\}$.

2. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$.

Soluție:

$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4(-3x - 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x - 12x - 8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -\dfrac{14}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases}$, deci $S = \{(-2; 4)\}$.

3. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

Soluție:

$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{2y}{5} - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ \dfrac{6y}{5} - {}^{5)}2y = {}^{5)}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 6y - 10y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ -4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -\dfrac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 \cdot (-5)}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$, deci $S =$ $= \{(-2; -5)\}$.

B. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda reducerii

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda reducerii sunt:

– înmulțirea fiecărei ecuații cu câte un număr, astfel încât prin adunarea ecuațiilor obținute termenii care conțin una dintre necunoscute să se reducă;
– rezolvarea ecuației obținute după reducerea uneia dintre necunoscute;
– reducerea celeilalte necunoscute în mod asemănător sau aflarea acesteia prin metoda substituției și determinarea mulțimii soluțiilor sistemului.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 5x-2y=6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-5y=19 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 2x-5y=13 \end{cases}$.

7. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 2x-5y=-19 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x-5y=11 \\ 7x+6y-1=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 11x+5y=-4 \\ 4x-3y-13=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+5y=-13 \\ 7x+12y=-18 \end{cases}$.

8. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \\ 3x-2y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x-3y=5 \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5} \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{4} \\ 2x-5y=8 \end{cases}$.

9. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 6(x-y)+3y+5=2x \\ 8(x-2y)+4=3x-10y \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4(x+y)-3x+y=-6 \\ 5(x-3y)-9x=3-16y \end{cases}$.

10. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=-2 \\ \dfrac{5x}{6}+\dfrac{3y}{4}=1\dfrac{1}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4x}{9}+\dfrac{3y}{4}=2\dfrac{5}{6} \end{cases}$.

11. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x-3y=-\sqrt{3} \\ \sqrt{6}x-\sqrt{2}y=3\sqrt{6} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x-\sqrt{2}y=-\sqrt{2} \\ \sqrt{3}x+\sqrt{6}y=6\sqrt{6} \end{cases}$.

12. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 1,(3)x-0,2(7)y=6,5 \\ 7x+2y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 0,(6)x-0,8(3)y=-4,5 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$.

13. Rezolvaţi prin metoda substituţiei următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2\sqrt{2}x+4\sqrt{3}y=16 \\ 4\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y=-7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\sqrt{2}x-6\sqrt{5}y=36 \\ 2\sqrt{2}x-7\sqrt{5}y=39 \end{cases}$.

14. Rezolvaţi prin metoda reducerii următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+3y=7 \\ -x+5y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 9x+y=19 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-7y=-8 \\ -2x+9y=12 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x-7y=11 \\ 6x+7y=-1 \end{cases}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, atunci $\sqrt{5}x = y\sqrt{5}$. A F

(7p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\frac{1}{7} + x = \frac{8}{7}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$. A F

(7p) **3.** Mulţimea $S = \{(3; -2)\}$ este soluţia sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Fracţiile ordinare $\frac{n+1}{6}$ şi $\frac{2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, sunt echivalente pentru $n =$ ....

(7p) **2.** Ştiind că, după o ieftinire cu 5%, o rachetă de tenis de câmp costă 152 lei, înseamnă că preţul rachetei înainte de ieftinire era de ....lei.

(7p) **3.** Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ este perechea de numere reale $(x; y) =$ ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Un sfert dintr-un număr este cu 3,5 mai mic decât trei cincimi din numărul respectiv. Numărul este egal cu:
A. 15; B. 28; C. 10; D. 12.

(8p) **2.** Rotunjind la prima zecimală soluţia ecuaţiei $3 - \sqrt{6}x = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}x$, unde $x \in \mathbb{R}$, obţinem numărul:
A. 1,7; B. 1,4; C. 2,5; D. 3,2.

(8p) **3.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Ştiind că numărul fetelor este cu 5 mai mic decât dublul numărului băieţilor, atunci numărul băieţilor este egal cu:
A. 10; B. 15; C. 12; D. 11.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Radu a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. În prima zi a cheltuit $\frac{3}{8}$ din sumă, în ziua

(8p) următoare a cheltuit $\frac{8}{9}$ din suma cheltuită în ziua precedentă, iar în ultima zi a cheltuit restul de 175 lei. Calculați suma de bani cheltuită de Radu a doua zi.

V. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} = 2 \\ \frac{x+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Aflați soluția sistemului de ecuații.

(8p) b) Comparați numerele reale x și y.

Capitolul III

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide

Citesc şi reţin

Definiţie: Produsul cartezian a două mulţimi nevide A şi B, notat $\boldsymbol{A \times B}$, este mulţimea formată cu perechile ordonate (a, b), unde $a \in A$ şi $b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Observaţii:

1. $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
2. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$.

Teoremă: Dacă card $A = m$ şi card $B = n$, atunci card$(A \times B) = m \cdot n$.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulţimile $A = \{d, f\}$ şi $B = \{p, b\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

Soluţie:

$A \times B = \{(d, p), (d, b), (f, p), (f, b)\}$.

2. Determinaţi mulţimile $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$, ştiind că $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

Soluţie:

Din $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ rezultă că $D = \{0, 3\}$ şi $C = \{0, 1, 3, 5\}$, prin urmare $C \cup D = \{0, 1, 3, 5\}$, $C \cap D = \{0, 3\}$, $C \setminus D = \{1, 5\}$ şi $D \setminus C = \varnothing$.

3. Se consideră mulţimile $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\}$.

a) Enumeraţi elementele mulţimilor E şi F.

b) Determinaţi mulţimile $E \times F$ şi $F \times E$.

Soluţie:

a) $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} = \{1, 2\}$, $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$;

b) $E \times F = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$;

$F \times E = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele notaţii:

a) $A \times B$; b) $C \times D$; c) $E \times F$; d) $M \times N$.

2. Se consideră mulţimile $A = \{3\}$ şi $B = \{4, 5\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

3. Se consideră mulţimile $C = \{a, b\}$ şi $D = \{d, f\}$. Determinaţi mulţimea $C \times D$.

4. Enumeraţi elementele mulţimilor $A \times B$ şi $B \times A$ în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \{0, 1\}, B = \{5\}$; b) $A = \{t\}, B = \{a, b\}$;
c) $A = \{2, 7\}, B = \{3, 8\}$; d) $A = \{f, g\}, B = \{o, v\}$;
e) $A = \{0, 4\}, B = \{0, 1, 3, 9\}$; f) $A = \{a, b, d\}, B = \{c, d, h\}$.

e)

5. Se consideră mulţimile $A = \{6, 7\}$ şi $B = \{4, 8, 9\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(6, 9) \in A \times B$; ☐ b) $(4, 7) \in A \times B$; ☐ c) $(7, 2) \in A \times B$; ☐
d) $(7, 4) \in B \times A$; ☐ e) $(8, 6) \in B \times A$; ☐ f) $(9, 5) \in B \times A$. ☐

6. Se consideră mulţimile $E = \{g, h, i\}$ şi $F = \{m, n\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(g, n) \notin E \times F$; ☐ b) $(i, m) \in E \times F$; ☐ c) $(n, h) \in F \times E$; ☐
d) $(n, g) \notin F \times E$; ☐ e) $(h, m) \in E \times F$; ☐ f) $(m, i) \in F \times E$. ☐

7. Determinaţi card $C \times D$ în următoarele cazuri:

a) card $C = 7$ şi card $D = 8$; b) card $C = 6$ şi card $D = 9$.

a)

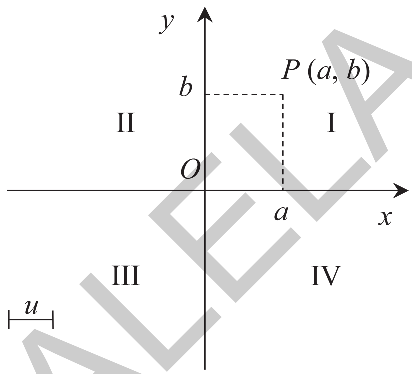
Lecţia 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Citesc şi reţin

Definiţie: Prin **sistem de axe ortogonale** înţelegem figura formată din două axe ale numerelor, care sunt perpendiculare şi care au drept origine punctul lor de intersecţie.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul O. Dreapta Ox se numeşte **axa absciselor**, dreapta Oy se numeşte **axa ordonatelor**, iar segmentul de lungime u a fost ales drept unitate de măsură.

Sistemul de axe ortogonale xOy împarte planul în patru părţi numite **cadrane**, notate cu cifrele romane I, II, III şi IV ca în figură.



Fiecărei perechi de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem ca în figură un punct P, notat $\boldsymbol{P(a, b)}$ şi care se citeşte „punctul P de abscisă a şi ordonată b" sau „punctul P de coordonate a şi b".

Observaţie: Fie M mijlocul segmentului AB. Dacă $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$, atunci

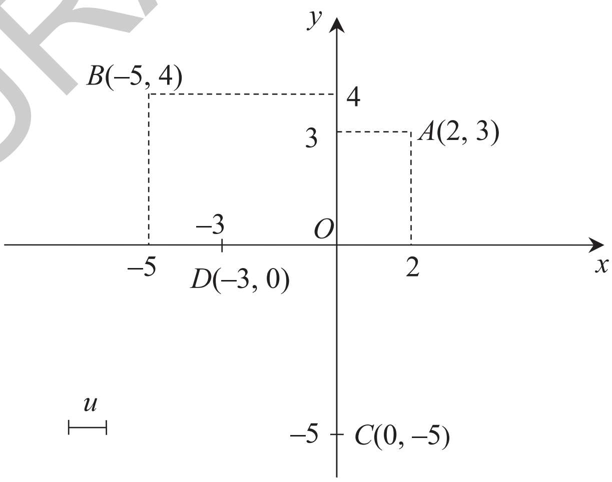
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Cum se aplică?

1. Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele puncte:

a) $A(2, 3)$; b) $B(-5, 4)$; c) $C(0, -5)$; d) $D(-3, 0)$.

Soluţie:



2. Notăm cu M mijlocul segmentului EF. Considerând punctele $M(-1, 4)$ şi $F(2, -3)$, determinaţi coordonatele punctului E.

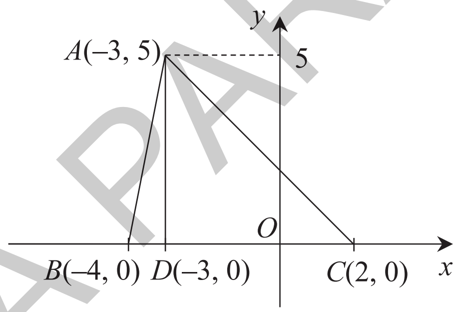
Soluţie:

Notăm cu x şi cu y abscisa, respectiv ordonata punctului E. Deoarece $M(-1, 4)$ şi $M\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+(-3)}{2}\right)$, rezultă că $\frac{x+2}{2} = -1$ şi $\frac{y+(-3)}{2} = 4$. Din $\frac{x+2}{2} = -1$ rezultă $x + 2 = -2$, de unde obţinem $x = -4$. Din $\frac{y+(-3)}{2} = 4$ rezultă $y + (-3) = 8$, de unde obţinem $y = 11$. Prin urmare, $E(-4, 11)$.

3. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $A(-3, 5)$, $B(-4, 0)$ şi $C(2, 0)$ şi apoi calculaţi aria triunghiului ABC.

Soluţie:

Observăm că $BC = |BO| + |OC| = |-4| + |2| = 4 + 2 = 6u$, iar înălţimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC este segmentul AD a cărui lungime reprezintă ordonata punctului A, prin urmare $AD = 5u$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6u \cdot 5u}{2} = 15u^2$.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $A(2, \sqrt{5})$; b) $D(-7, 1)$; c) $G(4, -9)$; d) $E(-2, -3)$.

2. Numiţi ordonata şi abscisa pentru fiecare dintre punctele:

a) $M(0, \sqrt{2})$; b) $E(-1, 3)$; c) $B(7, \sqrt{6})$; d) $N(-2, -1)$.

3. În figura următoare sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, G şi H în sistemul de axe ortogonale xOy. Completaţi parantezele cu coordonatele punctelor respective:

9. Notăm cu D mijlocul segmentului EF. Determinaţi coordonatele punctului F în următoarele cazuri:

a) $E(-3, 2)$ şi $D(4, -5)$; b) $E(8, 7)$ şi $D(-2, -5)$;
c) $E(-1, 6)$ şi $D(-3, 4)$; d) $E(-5, -9)$ şi $D(1, 2)$.

d)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

10. În sistemul de axe ortogonale xOy sunt reprezentate punctele $E(-3, 4)$ şi $F(1, -7)$. Determinaţi coordonatele punctului D, ştiind că acesta este:

a) simetricul lui E faţă de F; b) simetricul lui F faţă de E.

11. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $A(-2, 3)$, $B(3, 3)$, $C(6, -2)$, $D(-5, -2)$. Ce observaţi?

12. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $M(-3, 4)$, $N(5, 2)$, $P(2, -1)$, $Q(-6, 1)$. Ce observaţi?

13. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Determinaţi coordonatele punctelor C şi D în următoarele cazuri:

a) $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ şi $O(-2, 1)$; b) $A(4, 1)$, $B(6, -3)$ şi $O(5, -2)$.

14. Punctele $D(5, 0)$, $E(0, 5)$, $F(\sqrt{7}, 0)$ şi $G(0, -\sqrt{7})$ sunt reprezentate în sistemul de axe ortogonale xOy. Arătaţi că dreptele DE şi FG sunt perpendiculare.

15. Calculaţi aria patrulaterului $ABCD$, ştiind că $A(1, 6)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -2)$ şi $D(5, 2)$.

16. Reprezentaţi punctele $M(-4, -1)$, $N(-1, 1)$, $P(2, -1)$ şi $Q(-1, -3)$ în sistemul de axe ortogonale xOy folosind o unitate de măsură cu lungimea de 1 cm şi apoi calculaţi aria patrulaterului $MNPQ$.

17. Reprezentaţi punctele $C(1, 3)$, $D(3, 3)$, $E(4, -2)$ şi $F(-2, -2)$ în sistemul de axe ortogonale xOy folosind o unitate de măsură cu lungimea de 1 cm şi apoi calculaţi aria patrulaterului $CDEF$.

18. Reprezentaţi sistemul de axe ortogonale xOy şi apoi determinaţi coordonatele punctului D, ştiind că:

a) $D \in Oy$, $E(-2, 0)$, $F(3, 0)$ şi $\mathcal{A}_{DEF} = 10u^2$;
b) $D \in Ox$, $E(0, -4)$, $F(0, 2)$ şi $\mathcal{A}_{DEF} = 15u^2$.

19. Reprezentaţi sistemul de axe ortogonale xOy şi apoi arătaţi că patrulaterul $ABCD$ este trapez în următoarele cazuri:

a) $A(2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 2)$, $D(0, 1)$; b) $A(-2, 0)$, $B(-6, 0)$, $C(0, 3)$, $D(0, 1)$.

20. Reprezentaţi sistemul de axe ortogonale xOy şi apoi arătaţi că $AD \parallel BC$ în următoarele cazuri:

a) $A(4, 0)$, $B(-6, 0)$, $C(0, 3)$, $D(0, -2)$; b) $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 2)$, $D(0, -6)$.

GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

Citesc şi reţin

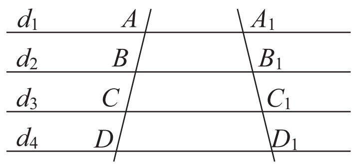
Definiţie: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleaşi unităţi de măsură.

Definiţie: Segmentele A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n şi E_1F_1, E_2F_2, …, E_nF_n se numesc **proporţionale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleaşi unităţi de măsură, formează şirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1}=\frac{A_2B_2}{E_2F_2}=\ldots=\frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$, $AB \equiv BC \equiv CD \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1B_1 \equiv B_1C_1 \equiv C_1D_1$.



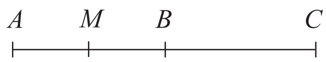
Cum se aplică?

1. Determinaţi raportul segmentelor AB şi EF cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluţie:

Exprimăm lungimea segmentului EF în centimetri: $EF = 140 \text{ mm} = 140 : 10 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$, deci $\frac{AB}{EF}=\frac{4\text{ cm}}{14\text{ cm}}=\frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B şi C, în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC$ şi notăm cu M mijlocul segmentului AB. Arătaţi că segmentele AM, MB, AB şi BC sunt proporţionale.



Soluţie:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x$, $AM = x$ şi $MB = x$;

$\frac{AM}{AB}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{MB}{BC}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, prin urmare $\frac{AM}{AB}=\frac{MB}{BC}$.

3. Se consideră segmentul EF şi punctul D interior acestuia EF, astfel încât $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$.

Aflaţi rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ şi $\frac{EF}{DF}$.

Soluţie:

Deoarece $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{DF}{DE}=\frac{5}{3}$. În continuare aplicăm proprietăţile proporţiilor derivate cu alţi termeni: $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, deci $\frac{DE}{DE+DF}=\frac{3}{3+5}$, aşadar $\frac{DE}{EF}=$ $=\frac{3}{8}$; $\frac{DE}{DF}=\frac{3}{5}$, deci $\frac{DE+DF}{DF}=\frac{3+5}{5}$, aşadar $\frac{EF}{DF}=\frac{8}{5}$.

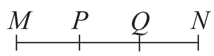
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat segmentul EF şi punctul M, mijlocul acestuia. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\frac{EM}{EF}=\frac{1}{2}$; ☐ b) $\frac{EM}{MF}=1$; ☐ c) $\frac{EF}{EM}=2$; ☐ d) $\frac{FM}{FE}=\frac{1}{3}$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat segmentul MN şi punctele P şi Q interioare acestuia, astfel încât $MP \equiv PQ \equiv QN$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.



a) $\frac{MP}{MN}=$ ....; b) $\frac{MQ}{MN}=$ ....; c) $\frac{MQ}{PN}=$ ....; d) $\frac{NQ}{NP}=$ ....

3. Determinaţi raportul segmentelor AB şi CD în următoarele cazuri:

a) $AB = 12$ cm şi $CD = 18$ cm; b) $AB = 36$ dm şi $CD = 24$ dm;
c) $AB = 32$ dm şi $CD = 40$ dm; d) $AB = 63$ cm şi $CD = 72$ cm.

c)

d)

4. În figura alăturată, pe dreapta d au fost construite punctele A, B, C, D şi E în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) $\frac{AB}{BE}=$ ....; b) $\frac{AC}{BE}=$ ....; c) $\frac{EA}{EB}=$ ....; d) $\frac{DE}{DA}=$ ....

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Dacă M este mijlocul segmentului AB și N este mijlocul segmentului AM, aflați raportul segmentelor:
a) AM și AB; b) AN și NB.

(1p) **2.** Se consideră punctul D interior segmentului EF. Știind că $\frac{DE}{DF}=\frac{4}{7}$, aflați rapoartele:
a) $\frac{DF}{DE}$; b) $\frac{DE}{EF}$.

(1p) **3.** În triunghiul ABC considerăm punctul D pe latura AB și construim $DE \parallel BC$, $E \in AC$. Dacă $AD = 3$ cm, $AB = 9$ cm și $AC = 15$ cm, aflați AE.

(1p) **4.** Se consideră triunghiul DEF și punctele M și N situate pe laturile DE, respectiv DF. Dacă $DM = 2$ cm, $DN = 3$ cm, $ME = 8$ cm și $NF = 12$ cm, arătați că $MN \parallel EF$.

(2p) **5.** În triunghiul ABC, cu $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $CA = 10$ cm, bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul E. Calculați:
a) AE; b) CE.

(3p) **6.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D situat pe latura BC. Construim $DE \parallel AC$, $E \in AB$ și $DF \parallel AB$, $F \in AC$. Arătați că:
a) $\frac{AE}{AB}=\frac{CD}{CB}$; b) $\frac{AF}{AC}=\frac{BD}{BC}$; c) $\frac{AE}{AB}+\frac{AF}{AC}=1$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră segmentul MN și punctul T interior acestuia, astfel încât $MT = 4NT$. Aflați raportul segmentelor:
a) NT și MT; b) MT și MN.

(1p) **2.** Se consideră punctul M interior segmentului NP. Știind că $\frac{MN}{NP}=\frac{3}{8}$, aflați rapoartele:
a) $\frac{NP}{MN}$; b) $\frac{MP}{MN}$.

(1p) **3.** Se consideră triunghiul ABC și punctele $E \in AB$ și $F \in AC$, astfel încât punctul A este interior segmentelor BE și CF și $EF \parallel BC$. Dacă $AB = 15$ cm, $AE = 5$ cm și $CF = 16$ cm, aflați AC.

(1p) **4.** Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in AB$ și $E \in AC$, astfel încât B și C sunt interioare segmentelor AD, respectiv AE. Dacă $AB = 4$ cm, $AD = 10$ cm, $AC = 6$ cm și $CE = 9$ cm, arătați că $BC \parallel DE$.

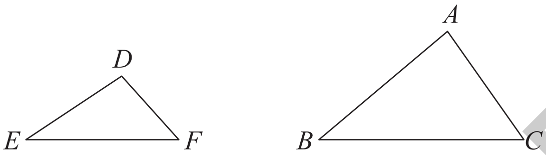
Lecţia 4. Triunghiuri asemenea

Citesc şi reţin

Definiţie: Triunghiurile *DEF* şi *ABC* se numesc **triunghiuri asemenea** dacă:

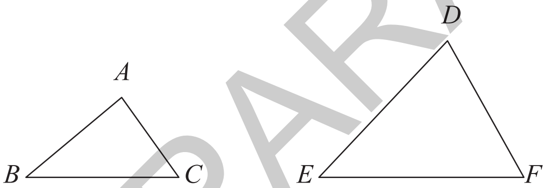
$$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A,\ \sphericalangle E \equiv \sphericalangle B,\ \sphericalangle F \equiv \sphericalangle C \text{ şi } \frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}.$$

Notăm $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ şi citim: triunghiul *DEF* este asemenea cu triunghiul *ABC*.



Definiţie: Dacă $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, atunci oricare dintre rapoartele $\frac{DE}{AB}, \frac{EF}{BC}, \frac{FD}{CA}$ se numeşte **raportul de asemănare** a celor două triunghiuri.

Teoremă: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \sim \Delta DEF \\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}=k\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathscr{A}_{ABC}}{\mathscr{A}_{DEF}}=k^2$$

Cum se aplică?

1. Ştiind că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, $\sphericalangle D = 43°$ şi $\sphericalangle E = 62°$, determinaţi $\sphericalangle C$.

Soluţie:

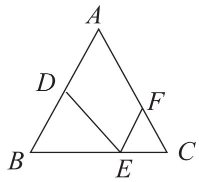
Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$. În triunghiul *DEF* avem: $\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180°$, deci $43° + 62° + \sphericalangle F = 180°$, de unde rezultă că $\sphericalangle F = 75°$, prin urmare $\sphericalangle C = 75°$.

2. Se consideră $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{3}$. Ştiind că $DE = 14$ cm, $EF = 18$ cm şi $FD = 22$ cm, calculaţi *AB*, *BC* şi *CA*.

Soluţie:

Deoarece $\Delta DEF \sim \Delta ABC$, rezultă că $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{2}{3}$; $\frac{DE}{AB}=\frac{2}{3}$, deci $\frac{14\text{ cm}}{AB}=\frac{2}{3}$, de unde rezultă că $AB = 21$ cm. Analog se arată că $BC = 27$ cm şi $CA = 33$ cm.

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele D, E şi F situate pe laturile AB, BC, respectiv CA. Dacă $\Delta DBE \sim \Delta ECF$, determinaţi măsura unghiului DEF.



Soluţie:

$\Delta DBE \sim \Delta ECF$, deci $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CEF$ şi, deoarece $\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED = 120°$, rezultă că $\sphericalangle CEF + \sphericalangle BED = 120°$, prin urmare $\sphericalangle DEF = 180° - 120°$ şi obţinem $\sphericalangle DEF = 60°$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $\Delta MNP \sim \Delta DEF$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle D$; ☐ b) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle F$; ☐ c) $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle E$; ☐ d) $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle F$. ☐

2. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$; ☐ b) $\frac{AB}{MN} = \frac{NP}{BC} = \frac{CA}{PM}$; ☐ c) $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA}$. ☐

3. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:
a) $\sphericalangle A = 39°$ şi $\sphericalangle B = 73°$, aflaţi măsura unghiului F;
b) $\sphericalangle D = 27°$ şi $\sphericalangle F = 62°$, aflaţi măsura unghiului B.

b)

4. Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Ştiind că:
a) $\sphericalangle A = 35°$ şi $\sphericalangle E = 75°$, aflaţi măsura unghiului F;
b) $\sphericalangle B = 40°$ şi $\sphericalangle F = 53°$, aflaţi măsura unghiului A.

b)

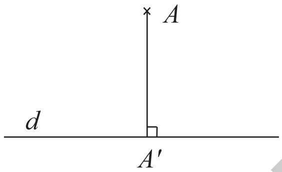
5. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: Dacă $\Delta MNP \sim \Delta QRT$, raportul lor de asemănare fiind egal cu 1, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta QRT$. ☐

Capitolul IV
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă

Citesc și rețin

Definiție: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreapta respectivă.



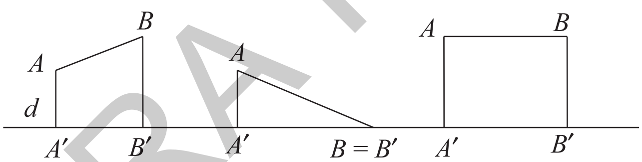
Notăm $\text{pr}_d A = A'$.

Teoremă:

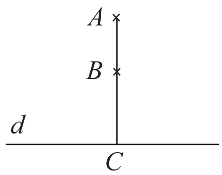
Proiecția unui segment pe o dreaptă este:

– un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe dreapta respectivă;

– un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe dreapta respectivă.



Notăm $\text{pr}_d AB = A'B'$

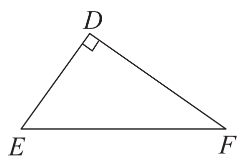


$\text{pr}_d AB = C$

Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90°$ din figura alăturată. Alegeți răspunsul corect:

A. $\text{pr}_{DE} F = E$; B. $\text{pr}_{DE} F = D$.



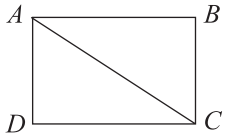
Soluție:

Deoarece $FD \perp DE$, rezultă că răspunsul corect este B, $\text{pr}_{DE} F = D$.

2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Determinați:

a) $\text{pr}_{DC} AB$; b) $\text{pr}_{AD} AC$.

Soluţie:

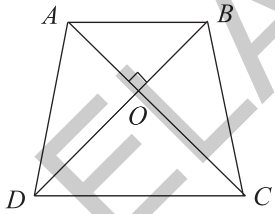


a) Cum $pr_{DC}\,A = D$ şi $pr_{DC}\,B = C$, rezultă că $pr_{DC}\,AB = DC$;

b) Cum $pr_{AD}\,A = A$ şi $pr_{AD}\,C = D$, rezultă că $pr_{AD}\,AC = AD$.

3. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are diagonalele perpendiculare. Ştiind că $pr_{AC}\,AD$ şi $pr_{BD}\,BC$ sunt segmente congruente, arătaţi că trapezul $ABCD$ este isoscel.

Soluţie:



$AC \cap BD = \{O\}$. Observăm că $pr_{AC}\,AD = AO$ şi $pr_{BD}\,BC = BO$, deci $AO \equiv BO$. Deoarece $AB \parallel CD$, aplicând teorema lui Thales, rezultă că $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$, prin urmare $AC \equiv BD$, de unde deducem că trapezul $ABCD$ este isoscel.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

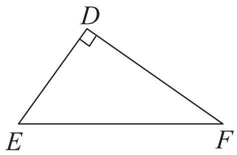
1. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $pr_{BC}\,E = F$; b) $pr_a\,M = N$; c) $pr_{EF}\,D = P$.

2. Citiţi următoarele propoziţii:

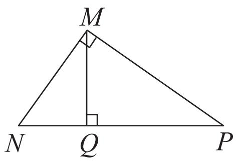
a) $pr_{AB}\,EF = MN$; b) $pr_a\,CD = M$; c) $pr_{EF}\,MN = PQ$.

3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90°$. Alegeţi răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:



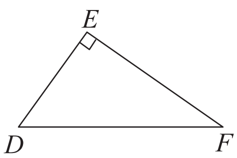
A. $pr_{DF}\,E = F$; B. $pr_{DF}\,E = D$.

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\sphericalangle M = 90°$ şi înălţimea MQ, $Q \in NP$. Alegeţi răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:



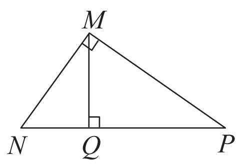
A. $pr_{NP}\,M = N$;
B. $pr_{NP}\,M = P$;
C. $pr_{NP}\,M = Q$.

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\sphericalangle E = 90°$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:



a) $pr_{EF}\,DE = E$; ☐ b) $pr_{ED}\,FE = E$. ☐

6. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\sphericalangle M = 90°$ şi înălţimea MQ, $Q \in NP$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:



a) $pr_{NP}\,MN = NQ$; ☐
b) $pr_{NP}\,MP = NP$; ☐
c) $pr_{NP}\,MP = QP$. ☐

25. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Dacă notăm cu R_1, R_2 şi R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor OAB, OBC, respectiv OCA, arătaţi că:

$$R \le \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}.$$ (I. Tudor)

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălţimea AD, $D \in BC$. Ştiind că $BD = 9$ cm şi $CD = 16$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

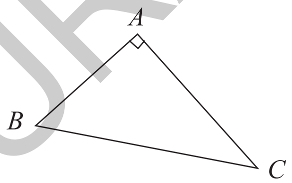
(3p) **2.** Din punctul A exterior cercului $\mathscr{C}(O, 6 \text{ cm})$ construim tangentele AB şi AC, $B, C \in \mathscr{C}(O, 6 \text{ cm})$. Ştiind că $AO = 12$ cm, calculaţi $\mathscr{P}_{ABC}$.

(3p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului $ABCD$, cu $\sphericalangle A < 90°$. Perpendiculara construită în punctul B pe latura BC intersectează diagonala AC în punctul E. Ştiind că lungimile segmentelor AE, EO şi OC, exprimate în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive de aceeaşi paritate, calculaţi $\mathscr{P}_{ABCD}$.

Lecţia 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

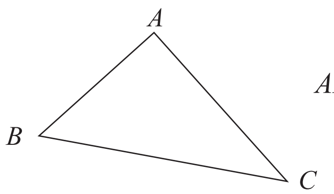
Citesc şi reţin

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



$$\sphericalangle A = 90° \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci unghiul care se opune acestei laturi este drept.

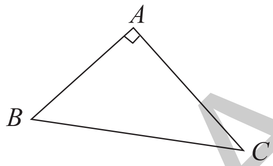


$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \sphericalangle A = 90°$$

Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$. Ştiind că $AB = 12$ cm şi $AC = 16$ cm, calculaţi BC.

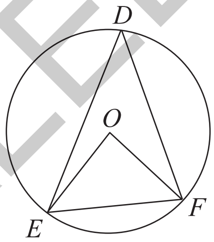
Soluţie:



Aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $BC^2 = 12^2 + 16^2$ sau $BC^2 = 144 + 256$, aşadar $BC^2 = 400$, de unde rezultă că $BC = \sqrt{400}$ cm şi obţinem $BC = 20$ cm.

2. Triunghiul ascuţitunghic DEF este înscris în cercul $\mathscr{C}(O,\ 3\sqrt{2}$ cm). Ştiind că $EF = 6$ cm, determinaţi $\sphericalangle EDF$.

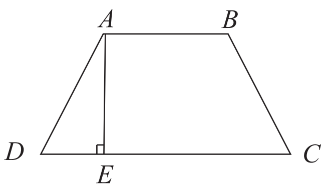
Soluţie:



În triunghiul OEF, observăm că $EF^2 = 36$, iar $OE^2 + OF^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 + 18 = 36$, prin urmare $EF^2 = OE^2 + OF^2$, de unde rezultă că $\sphericalangle EOF = 90°$, deci $\overset{\frown}{EF} = 90°$; $\sphericalangle EDF = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ construim înălţimea AE, $E \in CD$. Ştiind că $AB = 7$ cm, $CD = 19$ cm şi $AE = 8$ cm, calculaţi perimetrul trapezului $ABCD$.

Soluţie:



Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel rezultă că $DE = \dfrac{CD - AB}{2}$, aşadar $DE = \dfrac{19 \text{ cm} - 7 \text{ cm}}{2}$, de unde obţinem $DE = 6$ cm. În ΔAED, aplicăm teorema lui Pitagora: $AD^2 = AE^2 + ED^2$, deci $AD^2 = 8^2 + 6^2$ sau $AD^2 = 100$, prin urmare $AD = \sqrt{100}$, de unde rezultă că $AD = 10$ cm, deci $BC = 10$ cm.

$\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 7 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 19 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 46$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Construiţi triunghiul MNP cu $\sphericalangle N = 90°$ şi apoi stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $MN^2 = NP^2 + PM^2$; ☐ b) $NP^2 = PM^2 + MN^2$; ☐ c) $PM^2 = MN^2 + NP^2$. ☐

Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

Citesc şi reţin

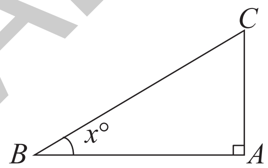
Definiţii:

Într-un triunghi dreptunghic considerăm un unghi ascuţit cu măsura de $x°$ şi numim:

- **sinus de $x°$**, notat **sin $x°$**, raportul dintre lungimea catetei opuse şi lungimea ipotenuzei;
- **cosinus de $x°$**, notat **cos $x°$**, raportul dintre lungimea catetei alăturate şi lungimea ipotenuzei;
- **tangentă de $x°$**, notată **tg $x°$**, raportul dintre lungimea catetei opuse şi lungimea catetei alăturate;
- **cotangentă de $x°$**, notată **ctg $x°$**, raportul dintre lungimea catetei alăturate şi lungimea catetei opuse.

$\sin x° = \frac{AC}{BC}$, $\cos x° = \frac{AB}{BC}$,

$\operatorname{tg} x° = \frac{AC}{AB}$, $\operatorname{ctg} x° = \frac{AB}{AC}$.



Sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta se numesc **funcţii trigonometrice**.

Proprietăţile funcţiilor trigonometrice:

1. $\sin x° = \cos(90° - x°)$, $\cos x° = \sin(90° - x°)$,
$\operatorname{tg} x° = \operatorname{ctg}(90° - x°)$, $\operatorname{ctg} x° = \operatorname{tg}(90° - x°)$;

2. $\sin x° < 1$, $\cos x° < 1$;

3. $\sin^2 x° + \cos^2 x° = 1$.

Valorile funcţiilor trigonometrice pentru unghiurile cu măsura de 30°, 45° şi 60°:

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Cum se aplică?

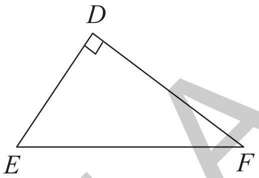
1. Se consideră triunghiul ABC cu $\measuredangle A = 90°$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm şi $CA = 4$ cm. Calculaţi:

a) $\sin B$; b) $\cos B$; c) $\operatorname{tg} C$; d) $\operatorname{ctg} C$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF, cu $\sphericalangle D = 90°$.
Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

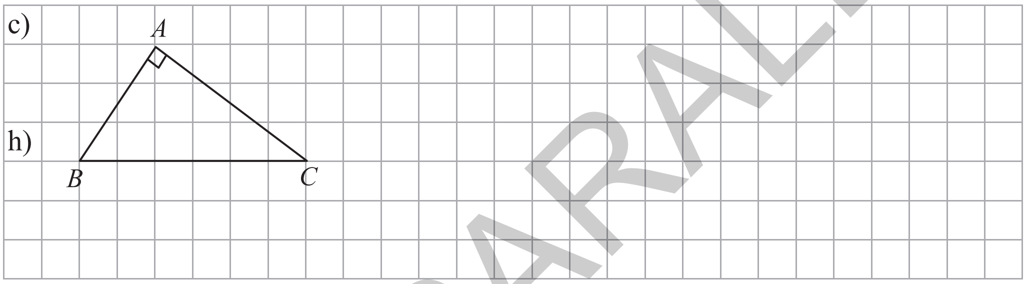


a) $\cos E = \dfrac{DE}{EF}$; $\square$ b) $\text{tg } F = \dfrac{DF}{DE}$; $\square$ c) $\sin F = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$

d) $\sin E = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$ e) $\text{ctg } F = \dfrac{DF}{EF}$; $\square$ f) $\cos F = \dfrac{DF}{DE}$. $\square$

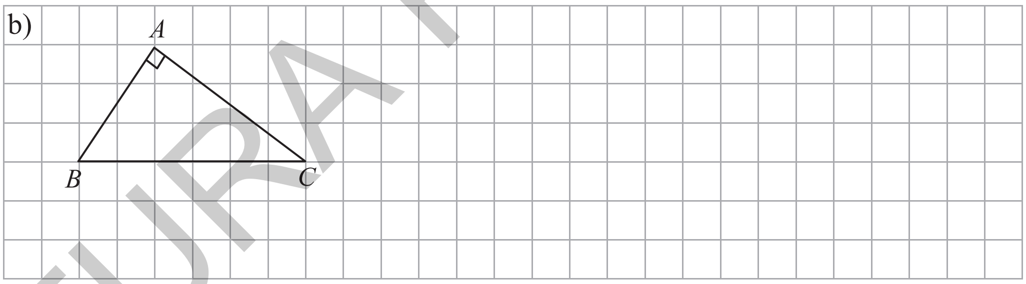
2. Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm şi $CA = 8$ cm. Calculaţi:

a) $\sin B$; b) $\sin C$; c) $\cos B$; d) $\cos C$;
e) $\text{ctg } B$; f) $\text{tg } C$; g) $\text{tg } B$; h) $\text{ctg } C$.



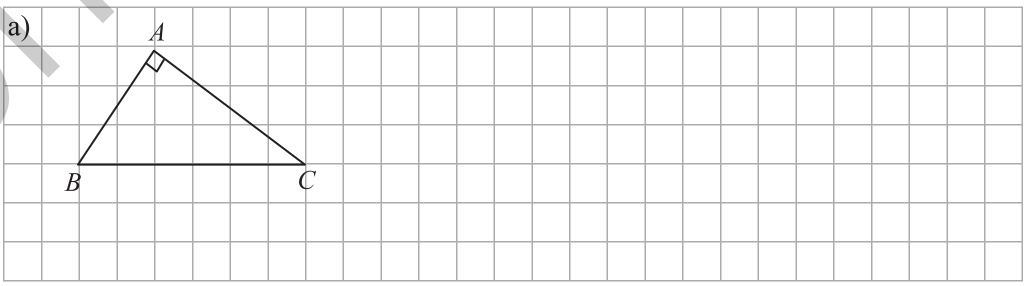
3. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sin B = 0{,}25$. Ştiind că:

a) $AC = 10$ cm, calculaţi BC; b) $BC = 12$ cm, calculaţi AC.



4. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\cos B = 0{,}75$. Ştiind că:

a) $AB = 21$ cm, calculaţi BC; b) $BC = 24$ cm, calculaţi AB.



12. Notăm cu x măsura unui unghi ascuţit. Ştiind că:

a) $\cos x = \frac{4}{5}$, aflaţi $\sin x$;
b) $\sin x = \frac{1}{3}$, aflaţi $\cos x$;
c) $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, aflaţi $\sin x$;
d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, aflaţi $\cos x$.

13. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, în următoarele cazuri:
a) $AB = 2\sqrt{7}$ cm şi $\sin B = 0{,}75$;
b) $AC = 3\sqrt{5}$ cm şi $\cos B = 0{,}(6)$.

14. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălţimea AD, $D \in BC$. Ştiind că:
a) $\operatorname{tg} B = 1{,}5$ şi $CD = 18$ cm, aflaţi BD;
b) $\operatorname{ctg} C = 1{,}2$ şi $BD = 5$ cm, aflaţi CD.

15. Arătaţi că numerele:
a) $\sin 30°$, $\sin 45°$ şi $\sin 60°$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic;
b) $\cos 30°$, $\cos 45°$ şi $\cos 60°$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

16. Dacă x este măsura unui unghi ascuţit, arătaţi că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

17. Arătaţi că:

a) $\frac{1}{(\sin 60° - \sin 30°)(\cos 60° + \cos 30°)} \in \mathbb{N}$;

b) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg}45°}{(\operatorname{tg}30° - \operatorname{tg}60°)^2} - \frac{\operatorname{tg}45°}{(\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}60°)^2}} \in \mathbb{Q}$.

18. În triunghiul DEF, construim înălţimea DN, N este interior laturii EF. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului DEF, ştiind că:
a) $DE = 8\sqrt{3}$ cm, $DN = 4\sqrt{6}$ cm şi $NF = 12\sqrt{2}$ cm;
b) $EN = 6\sqrt{2}$ cm, $FN = 6\sqrt{6}$ cm şi $DF = 12\sqrt{3}$ cm.

19. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$, în care $\sphericalangle PMQ = 2 \cdot \sphericalangle PMN$. Calculaţi perimetrul dreptunghiului $MNPQ$, ştiind că:
a) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 25\sqrt{3}$ cm^2;
b) $\mathcal{A}_{MNPQ} = 54\sqrt{3}$ cm^2.

20. Triunghiul ascuţitunghic DEF cu $\sphericalangle D = 60°$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Determinaţi raza cercului în următoarele cazuri:
a) $EF = 12\sqrt{3}$ cm;
b) $EF = 6\sqrt{2}$ cm.

21. Triunghiul ascuţitunghic DEF este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Determinaţi măsura unghiului D, ştiind că:
a) $R = 5\sqrt{3}$ cm şi $EF = 15$ cm;
b) $R = 2\sqrt{6}$ cm şi $EF = 6\sqrt{2}$ cm.

22. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de $6\sqrt{6}$ cm şi punctele E şi F situate pe laturile BC, respectiv CD, astfel încât $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle DAF$. Calculaţi perimetrul triunghiului AEF.

23. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Ştiind că $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 10$ cm şi $AD = 3\sqrt{3}$ cm, determinaţi măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Capitolele: Ecuații și sisteme de ecuații liniare, Elemente de organizare a datelor, Asemănarea triunghiurilor, Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Dacă reprezentăm punctul $A(-3, -5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy, atunci acesta este situat în cadranul:
A. I; B. II; C. III; D. IV.

(7p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\sqrt{7}x+1=8$, unde $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:
A. 3; B. $\sqrt{7}$; C. $\sqrt{5}$; D. 4.

(7p) **3.** Se consideră mulţimile $E = \{a, b\}$ şi $F = \{c\}$. Mulţimea $E \times F$ este egală cu:
A. $\{(a, c), (b, c)\}$; B. $\{(a, b), (a, c)\}$; C. $\{(c, a), (c, b)\}$; D. $\{(c, b), (a, b)\}$.

(7p) **4.** Între mulţimile $A = \{-1, 2\}$ şi $B = \{-1, -4\}$ se stabileşte o dependenţă funcţională aplicând regula:
A. $x \to 2x$; B. $x \to (-x)^2$; C. $x \to -x^2$; D. $x \to 3x$.

(7p) **5.** Se consideră triunghiul DEF cu $\sphericalangle D = 90°$. Dacă $\text{tg}(\sphericalangle E) = \sqrt{3}$, atunci măsura unghiului F este egală cu:
A. 60°; B. 45°; C. 30°; D. 75°.

(7p) **6.** Perimetrul triunghiului ABC cu măsura unghiului A egală cu 90°, $AB = 3$ cm şi $AC = 4$ cm este egal cu:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Calculaţi distanţa dintre punctele M şi N, exprimată în centimetri, ştiind că $M(8, 3)$ şi $N(1, 4)$.

(8p) **2.** Dublul sumei dintre 1,(3) şi un sfert dintr-un număr raţional este egal cu diferenţa dintre triplul numărului respectiv şi 0,(6). Aflaţi numărul.

(8p) **3.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2(3x-\sqrt{2})+5y=-\sqrt{2} \\ 4x-3(2y+\sqrt{2})=7\sqrt{2} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(8p) **4.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele M, N şi P situate pe segmentele AD, BD, respectiv BC, astfel încât $\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BD}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{BP}{BC}=\frac{1}{4}$. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 90°, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, punctul D situat pe latura BC, astfel încât $AD = 13$ cm.

(8p) a) Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta BC.

(8p) b) Determinaţi raportul ariilor triunghiurilor ABD şi ACD.

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.
PARTEA I. Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Numărul $\sqrt{0,25}$ aparține mulțimii:
A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

(0,5p) **2.** Rădăcina pătrată a numărului natural 100 este egală cu:
A. 12; B. 14; C. 16; D. 10.

(0,5p) **3.** Dacă reprezentăm punctul $M(-5, -2)$ în sistemul de axe ortogonale xOy, atunci acesta aparține cadranului:
A. I; B. III; C. IV; D. II.

(0,5p) **4.** Regula prin care se stabilește o dependență funcțională între mulțimile $E = \{1, 3\}$ și $F = \{3, 9\}$ este:
A. $x \to 3x$; B. $x \to x^2$; C. $x \to x^3$; D. $x \to 2x$.

(0,5p) **5.** Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) + \left|-\sqrt{6}\right|$ este egal cu:
A. $2\sqrt{6}$; B. 0; C. $\sqrt{6}$; D. $-\sqrt{6}$.

(0,5p) **6.** Soluția ecuației $6 - 5x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, este:
A. 1; B. $-\frac{1}{3}$; C. $-\frac{1}{2}$; D. 3.

(0,5p) **7.** Aria dreptunghiului cu $L = 15$ cm și $l = \frac{2}{3}L$ cm este egală cu:
A. 100 cm^2; B. 20 cm^2; C. 30 cm^2; D. 150 cm^2.

(0,5p) **8.** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\sphericalangle A = 42°$ și $\sphericalangle B = 75°$, atunci $\sphericalangle F$ este egală cu:
A. 36°; B. 50°; C. 63°; D. 48°.

(0,5p) **9.** Dacă triunghiul echilateral ABC cu perimetrul de 9 cm este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, R)$, atunci R este egală cu:
A. $\sqrt{3}$ cm; B. $2\sqrt{3}$ cm; C. $3\sqrt{2}$ cm; D. $\sqrt{6}$ cm.

PARTEA A II-A. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Se consideră numărul $a = \left(\frac{7}{2\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{6}{0,8(3)}}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2}$. Arătați că $a \in \mathbb{Z}$.

2. Fie A și B două mulțimi. Se știe că $A \times B = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$.
(0,7p) a) Determinați mulțimile A și B.
(0,7p) b) Determinați mulțimea $B \times A$.

3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că $AB = 4\sqrt{6}$ cm, $BC = 4\sqrt{6}$ cm și $\mathscr{P}_{ABCD} = 20\sqrt{6}$ cm.
(0,8p) a) Aflați $\sphericalangle DAB$. *(0,7p)* b) Calculați $\mathscr{A}_{ABCD}$. *(0,8p)* c) Calculați $\mathscr{P}_{COD}$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. a) A; b) A; c) A; d) A. **2.** a) A; b) A; c) A; d) A. **3.** a) $24x = 36y \Leftrightarrow 24x : 4 = 36y : 4 \Leftrightarrow 6x = 9y$; b) și c) analog. **4.** a) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) Analog. **5.** a) $2z = 5t \Leftrightarrow 10 \cdot 2z = 10 \cdot 5t \Leftrightarrow 20z = 50t$; b) $2z = 5t \Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot 2z = \frac{1}{10} \cdot 5t \Leftrightarrow \frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2z = 5t \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot 2z = \sqrt{7} \cdot 5t \Leftrightarrow 2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$. **6.** a) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}y\right) : \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 2y$; b) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : 2\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}y\right) : 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = y$; c) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}y\right) : \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}y$. **7.** Egalitățile se împart cu 5, respectiv cu 7 și se adună membru cu membru. **8.** $6a^4 = 6b^4 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$. **9.** a) $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$. **10.** a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{xy+2x+2y+4}{2} = \frac{x(y+2)+2(y+2)}{2} = \frac{(y+2)(x+2)}{2} = \frac{1}{2}(x+2) \cdot (y+2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{xy+3x-3y+9}{3} = \frac{x(y-3)-3(y-3)}{3} = \frac{(y-3)(x-3)}{3} = \frac{1}{3}(x-3) \cdot (y-3)$. **11.** $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-c}{c} + \frac{1-a}{a} + \frac{1-b}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} - 1 + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. **12.** $\frac{x^2+yz}{1+x^3} + \frac{y^2+zx}{1+y^3} + \frac{z^2+xy}{1+z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+yz}{xyz+x^3} + \frac{y^2+zx}{xyz+y^3} + \frac{z^2+xy}{xyz+z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+yz}{x(x^2+yz)} + \frac{y^2+zx}{y(y^2+zx)} + \frac{z^2+xy}{z(z^2+xy)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = y \Leftrightarrow x\sqrt{2} = y\sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$. **2.** $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}x\right) : \sqrt{2} = \left(\sqrt{14}y\right) : \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$. **3.** $4a = 5b \Leftrightarrow 4a \cdot 3 = 5b \cdot 3 \Leftrightarrow 12a = 15b$; $14c = 10d \Leftrightarrow (14c) : 2 = (10d) : 2 \Leftrightarrow 7c = 5d$. Din $12a = 15b$ și $7c = 5d$ rezultă că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

1. a) Da; b) Da; c) Nu. **2.** a) Da; b) Da; c) Nu. **3.** a) Nu; b) Da; c) Nu. **4.** a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x = \frac{1}{3}$; e) $x = -\frac{3}{2}$; f) $x = -\frac{2}{3}$; g) $x = \frac{4}{7}$; h) $x = \frac{3}{5}$. **5.** a) $x = 4$; b) $x = 18$; c) $x = 13$;

Capitolul III. Asemănarea triunghiurilor

Lecţia 1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

1. a) A; b) A; c) A; d) F. **2.** a) $\frac{MP}{MN}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{MQ}{MN}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{MQ}{PN}=1$; d) $\frac{NQ}{NP}=\frac{1}{2}$. **3.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{2}$; c) $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{5}$; d) $\frac{AB}{CD}=\frac{7}{8}$. **4.** a) $\frac{AB}{BE}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{AC}{BE}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{EA}{EB}=\frac{4}{3}$; d) $\frac{DE}{DA}=\frac{1}{3}$. **5.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{5}{8}$; b) $\frac{AB}{CD}=\frac{7}{2}$; c) $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{3}$; d) $\frac{AB}{CD}=\frac{8}{5}$. **6.** a) $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{MN}$; b) $\frac{AB}{MN}=\frac{EF}{CD}$. **7.** a) $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$; b) $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{4}$; c) $\frac{PB}{AM}=\frac{3}{2}$; d) $\frac{AB}{PB}=\frac{4}{3}$. **8.** a) $\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{DC}{DA}=\frac{2}{5}$; c) $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{3}$; d) $\frac{AB}{AD}=\frac{6}{5}$. **9.** a) $\frac{MB}{MA}=\frac{5}{4}$, $\frac{MA}{AB}=\frac{4}{9}$, $\frac{AB}{MB}=\frac{9}{5}$; b) $\frac{AB}{MA}=\frac{7}{2}$, $\frac{MB}{MA}=\frac{5}{2}$, $\frac{MB}{AB}=\frac{5}{7}$. **10.** $\mathcal{P}_{ABC}=67{,}5$ cm. **11.** a) Se arată că $\frac{AB}{AD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{DB}{DA}=\frac{CB}{CM}=\frac{2}{3}$. **12.** a) $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3D = 4$ cm; b) $BN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3C = 5$ cm. **13.** a) Se arată că $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}=\frac{3}{2}$. **14.** $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EB}$, deci $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EB}$, sau $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AB}$, de unde rezultă că $AD \equiv AE$, prin urmare $D = E$. **15.** $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM}$, deci $\frac{AB \cdot ME}{2}=\frac{AC \cdot MF}{2}$, de unde rezultă că $AB \cdot ME = AC \cdot MF$ sau $\frac{AB}{AC}=\frac{MF}{ME}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{ED}{EF}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{FD}{FE}=\frac{1}{3}$; c) $\frac{FD}{DE}=\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{AB}{MN}=\frac{PQ}{CD}=\frac{2}{5}$. **3.** $\frac{MP}{MN}=\frac{5}{9}$, $\frac{PN}{MN}=\frac{4}{9}$.

Lecţia 2. Teorema lui Thales

1. a) A; b) A; c) F; d) A. **2.** a) $FC = 6$ cm; b) $AE = 1$ cm; c) $AC = 40$ cm; d) $AE = 6$ cm; e) $FC = 3$ cm; f) $AB = 15$ cm. **3.** a) $MN = 20$ cm; b) $EM = 5$ cm; c) $EM = 6$ cm; d) $FN = 9$ cm; e) $FN = 18$ cm; f) $EM = 21$ cm. **4.** a) $AE = 4$ cm; b) $EC = 15$ cm; c) $AD = 4$ cm; d) $DB = 20$ cm. **5.** a) $EC = 24$ cm; b) $AE = 5$ cm; c) $DB = 7$ cm; d) $AD = 5$ cm. **6.** a) $BF = 16$ cm; b) $ED = 5$ cm; c) $FC = 15$ cm; d) $AE = 21$ cm. **7.** a) $\mathcal{P}_{AEDF} = 88$ cm; b) $\mathcal{P}_{AEDF} = 104$ cm; c) $\mathcal{P}_{AEDF} = 108$ cm. **8.** a) Dacă $E \in AB$, obţinem $AF = 10{,}5$ cm şi $CF = 17{,}5$ cm, iar dacă $A \in EB$, obţinem $AF = 42$ cm şi $CF = 70$ cm; b) Dacă $E \in AB$, obţinem $AF = 9$ cm şi $CF = 6$ cm, iar dacă $B \in AE$, obţinem $AF = 45$ cm şi $CF = 30$ cm. **9.** a) Aplicând teorema bisectoarei obţinem $BD = 10$ cm şi $CD = 12$ cm; b) Analog obţinem $BD = 9$ cm şi $CD = 21$ cm. **10.** a) Aplicând teorema bisectoarei obţinem $AB = 9$ cm şi $AC = 12$ cm; b) Analog obţinem $AB = 12$ cm şi $AC = 8$ cm. **11.** $AG \cap BC = \{M\}$; $\frac{BE}{BM}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2BE}{BC}=\frac{2}{3} \Rightarrow BE = \frac{BC}{3}$ şi analog se arată că $CF = \frac{BC}{3}$,

Cuprins