Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 8 / Ion Tudor. – Ed. a 7-a. – Pitești : Paralela 45, 2023
2 vol.
ISBN 978-973-47-3895-3
Partea 2. – 2023. – ISBN 978-973-47-3923-3

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti,
jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tipărit la R.A. „Monitorul Oficial"

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

8

Ediţia a VII-a

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea şi scăderea fracţiilor algebrice

Citesc şi reţin

Adunarea şi **scăderea** fracţiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea şi scăderea fracţiilor ordinare.

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x) \pm C(x)}{B(x)},\ B(x) \neq 0.$

2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{D(x)},\ B(x) \neq 0,\ D(x) \neq 0,$ se efectuează astfel:

– se aduc la acelaşi numitor comun fracţiile algebrice $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ şi $\dfrac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracţiile aduse la acelaşi numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observaţie: Proprietăţile adunării fracţiilor ordinare se transferă şi la adunarea fracţiilor algebrice.

Cum se aplică?

1. Calculaţi:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{x+2}{2x}$.

Soluţie:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x} = \dfrac{x-1+3x-5}{4x} = \dfrac{4x-6}{4x} = \dfrac{2(2x-3)}{4x} = \dfrac{2x-3}{2x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - {}^{3x)}\dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x(x+2)}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x^2+6x}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$

$= \dfrac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \dfrac{1-6x}{6x^2}.$

2. Calculaţi: $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\dfrac{6x-1}{6x-9}$.

Soluţie:

$$\frac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\frac{6x-1}{6x-9}=\frac{^{3)}4x^2-1}{2x(2x-3)}-\frac{^{2x)}6x-1}{3(2x-3)}=\frac{3(4x^2-1)-2x(6x-1)}{6x(2x-3)}=$$

$$=\frac{12x^2-3-12x^2+2x}{6x(2x-3)}=\frac{\cancel{2x-3}}{6x\,\cancel{(2x-3)}}=\frac{1}{6x}.$$

3. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $E(x)=\dfrac{7x+3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x-x^2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Soluţie:

$$E(x)=\frac{^{x)}7x+3}{(x-1)(x+1)}-\frac{^{x-1)}x-1}{x(x+1)}+\frac{^{x+1)}1}{x(x-1)}=\frac{x(7x+3)-(x-1)^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{7x^2+3x-x^2+2x-1+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{6x^2+6x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{6\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}\,(x-1)\,\cancel{(x+1)}}=\frac{6}{x-1}.$$

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi:

a) $\dfrac{4x-1}{5x^4}+\dfrac{7-6x}{5x^4}$; b) $\dfrac{6x-5}{7x^2}+\dfrac{8-3x}{7x^2}$; c) $\dfrac{7x-2}{2x^3}-\dfrac{3x-1}{2x^3}$; d) $\dfrac{6x-5}{4x^2}-\dfrac{8-2x}{4x^2}$.

b)

2. Calculaţi:

a) $\dfrac{7x^2-3x}{x-1}+\dfrac{x^2-5x}{x-1}$; b) $\dfrac{2x^2+x}{x+2}+\dfrac{x^2+5x}{x+2}$;

c) $\dfrac{3x^2+x}{x-3}-\dfrac{x^2+7x}{x-3}$; d) $\dfrac{5x^2-x}{x+1}-\dfrac{x^2-5x}{x+1}$.

d)

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x^3-4x^2+4x}{(x-1)^3-(x-1)} - \frac{x^2-3}{x^2-1} + \frac{x^3+4x^2+4x}{(x+1)^3-(x+1)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Arătaţi că $E(x)$ nu depinde de x pentru orice x din domeniul de definiţie.

17. Se consideră expresia $E(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Rotunjiţi la a patra zecimală numărul $n = E(2) + E(3) + E(4) + ... + E(11)$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculaţi:

a) $\frac{5x^2-x}{x-4} - \frac{4x^2+3x}{x-4}$; b) $\frac{2x+1}{6x} + \frac{4-x}{3x-9}$.

(3p) **2.** Calculaţi $\frac{x+1}{2x^2-x} - \frac{2x+3}{4x^2-1} + \frac{1}{x}$.

(3p) **3.** Se consideră expresia $E(x) = \frac{x+3}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{x-3}{x^2-2x+1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Aduceţi expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

Lecţia 2. Înmulţirea fracţiilor algebrice

Citesc şi reţin

Înmulţirea fracţiilor algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ şi $\frac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează astfel: $\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$.

Observaţie: Proprietăţile înmulţirii fracţiilor ordinare se transferă şi la înmulţirea fracţiilor algebrice.

Cum se aplică?

1. Efectuaţi următoarele înmulţiri:

a) $\frac{x+2}{3x^3} \cdot \frac{4x+1}{x-2x^2}$; b) $\frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x+3}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculaţi:

a) $\left(\dfrac{9x-7}{10x^3}+\dfrac{6x+2}{10x^3}\right):\dfrac{1}{4x}$;   b) $\dfrac{2x}{5}\cdot\left(\dfrac{3x^2-10}{6x^2}-\dfrac{4x+5}{8x}\right)$.

(3p) **2.** Calculaţi $\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{3}{x^2+2x+1}\right)$.

(3p) **3.** Se consideră expresia:

$$E(x)=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4}-\left(\frac{1-x}{x^2-9}+\frac{x+1}{x^2+3x}\right):\frac{x-2}{4x-12}\right],\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0,2,3\}.$$

a) Aduceţi expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $E(x)\geq 0$.

Lecţia 6. Ecuaţii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Citesc şi reţin

Definiţie: O ecuaţie de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (1) se numeşte **ecuaţie de gradul II cu o necunoscută**. Numerele a, b şi c se numesc **coeficienţii ecuaţiei**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1) dacă $au^2 + bu + c = 0$ (u verifică ecuaţia).

A rezolva ecuaţia (1) înseamnă a determina mulţimea de soluţii:

$$S=\{u\in\mathbb{R}\mid au^2+bu+c=0\}.$$

Definiţie: Două ecuaţii de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Observaţie: Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile reale ale ecuaţiei de forma $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuaţiei (1):

A. Cazurile particulare

1. $c = 0$; $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ sau $x_2 = -\dfrac{b}{a}$, deci $S=\left\{0,-\dfrac{b}{a}\right\}$.

2. $b = 0$; $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{c}{a} = 0$.

Dacă $\dfrac{c}{a} > 0$, atunci $S = \varnothing$.

Dacă $\dfrac{c}{a} \le 0$, atunci $x^2 + \dfrac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$ şi $x_2 = -\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$, deci $S = \left\{-\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right\}$.

B. Cazul general

Definiţie: Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numeşte **discriminantul ecuaţiei** (1).

Pentru rezolvarea ecuaţiei (1) în cazul general $a \ne 0$, $b \ne 0$, $c \ne 0$ procedăm astfel:

1. calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. ▪ dacă $\Delta < 0$, atunci ecuaţia (1) nu are soluţii în $\mathbb{R}$, deci $S = \varnothing$;

   ▪ dacă $\Delta = 0$, atunci ecuaţia (1) are două soluţii egale în $\mathbb{R}$:

   $$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

   ▪ dacă $\Delta > 0$, atunci ecuaţia (1) are două soluţii distincte în $\mathbb{R}$:

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ şi } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $3x^2 + 5x = 0$; b) $4x^2 - 100 = 0$.

Soluţie:

a) $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, deci $x = 0$ sau $3x + 5 = 0$; $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$, prin urmare $S = \left\{-\dfrac{5}{3}, 0\right\}$;

b) $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$, deci $x - 5 = 0$ sau $x + 5 = 0$; $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ şi $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; prin urmare, $x \in \{-5, 5\}$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale următoarele ecuaţii:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$; b) $(x - 1)^2 = -x(x + 5)$.

Soluţie:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$, deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, prin urmare $\Delta = 0$.

$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$, deci $S = \{-3\}$;

b) $(x-1)^2 = -x(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$, deci $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, prin urmare $\Delta > 0$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ deci } S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

3. Un dreptunghi cu aria de 36 cm^2 are lăţimea cu 5 cm mai mică decât lungimea. Calculaţi perimetrul dreptunghiului.

Soluţie:

$L \cdot l = 36 \Leftrightarrow L(L-5) = 36 \Leftrightarrow L^2 - 5L - 36 = 0$, deci $a = 1$, $b = -5$, $c = -36$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$, prin urmare $\Delta > 0$.

$$L_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5-13}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ cm.}$$

$$L_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm, prin urmare } L = 9 \text{ cm}, l = 4 \text{ cm}$$

şi perimetrul este egal cu $2(L + l) = 2(9 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) = 26$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2 - 2x = 0$; b) $x^2 + 5x = 0$; c) $x^2 + 9x = 0$;
d) $2x^2 - 18x = 0$; e) $2x^2 + 14x = 0$; f) $5x^2 - 10x = 0$;
g) $18x^2 = 24x$; h) $12x^2 = -8x$; i) $15x^2 = 20x$.

h)

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 4 = 0$; c) $x^2 - 9 = 0$;
d) $4x^2 - 9 = 0$; e) $9x^2 - 4 = 0$; f) $16x^2 - 1 = 0$;
g) $25x^2 = 36$; h) $49x^2 = 64$; i) $81x^2 = 16$.

i)

Capitolul III
FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite

Citesc şi reţin

Definiţie: Fie A şi B două mulţimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numeşte **funcţie** definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B.

Notăm $f : A \to B$ şi citim „funcţia f este definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B”.

Mulţimea A se numeşte **domeniul de definiţie** al funcţiei, mulţimea B se numeşte **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcţiei, iar legea (procedeul) f se numeşte **legea de corespondenţă** a funcţiei.

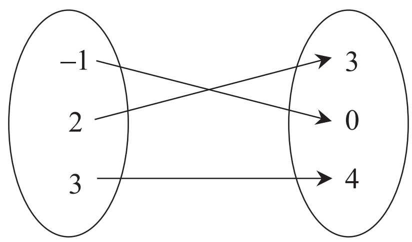
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numeşte **imaginea lui x prin funcţia f** sau **valoarea funcţiei f în punctul x**.

Moduri de definire a unei funcţii

O funcţie poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f : \{-1, 2, 3\} \to \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

Definiţie: Fie $f : A \to B$ o funcţie. Mulţimea $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numeşte **imaginea funcţiei f** sau **mulţimea valorilor funcţiei f**. $\operatorname{Im} f \subset B$.

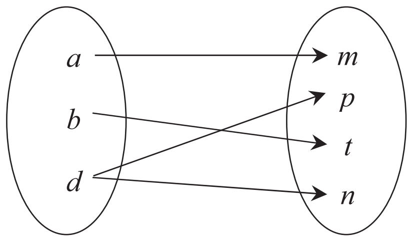
Definiţie: Fie $f : A \to B$ o funcţie. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcţia f se numeşte **funcţie numerică**.

Definiţie: Două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ şi citim „funcţiile f şi g sunt egale”.

Cum se aplică?

1. Stabiliţi dacă diagrama următoare defineşte o funcţie.



Soluţie:

Diagrama nu defineşte o funcţie, deoarece elementul d din domeniul de definiţie are două imagini, p şi n.

2. Se consideră funcţia $f : \{-2, -1, 0, 2\} \to \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinaţi mulţimea Im f.

Soluţie:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiţie: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare Im $f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcţia $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \to A$, $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

a) Calculaţi media aritmetică a numerelor $g(-4)$ şi $g(4)$.

b) Calculaţi media geometrică a numerelor $g(-6)$ şi $g(6)$.

Soluţie:

a) $g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3$ şi $g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7$; $m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$;

b) $g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2$ şi $g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8$; $m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele funcţii:

a) $f : E \to F$, $f(x) = 10x$;

b) $g : \{-1, 1, 2\} \to \{1, 4\}$, $g(x) = x^2$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

2. Se consideră funcţia $f : A \to B$, $f(x) = 5x$. Numiţi:

a) domeniul de definiţie; b) domeniul de valori; c) legea de corespondenţă.

b) Se consideră funcţiile $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}, f(x) = -x$ şi $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^3$. Arătaţi că $f \neq g$.

c) Se consideră funcţiile $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}, g(x) = x$ şi $h : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^7$. Arătaţi că $g = h$.

20. Se consideră funcţia $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Arătaţi că următoarele formule descriu funcţia f:

a) $f(x) = 1 - x$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^3 + 1$.

21. Se consideră funcţia $g : \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\} \to \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\}$. Stabiliţi care dintre următoarele formule descriu funcţia g:

a) $g(x) = x$; b) $g(x) = x^{-1}$; c) $g(x) = |x|$.

22. Se consideră funcţia $f : \{-5, -3, 1, 4\} \to B$. Determinaţi Im f, dacă:

a) $f(x) = |x + 1|$; b) $f(x) = |x - 1|$.

23. Se consideră funcţia $f : \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\} \to C$. Determinaţi Im f, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

24. Se consideră funcţia $r : \{24, 25, 28, 43, 59\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, unde legea de corespondenţă asociază fiecărui număr din domeniul de definiţie restul împărţirii lui la 7. Determinaţi cardinalul mulţimii Im r.

25. Se consideră funcţia $g : \{13, 14, 15, 16, 25\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, unde legea de corespondenţă asociază fiecărui număr din domeniul de definiţie numărul său de divizori naturali. Câte submulţimi are mulţimea Im g?

26. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Arătaţi că $f(x)[f(x + 1) + 1] + 1 \geq 0$.

27. Se consideră funcţia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = (-1)^n \cdot n$. Calculaţi suma $S = g(1) + g(2) + g(3) + ... + g(101)$.

28. Se consideră funcţia $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $h(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Calculaţi produsul $P = h(1) \cdot h(2) \cdot h(3) \cdot ... \cdot h(100)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

29. Se consideră funcţia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 1$. Arătaţi că $n \in \mathbb{N}$, dacă:

a) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(100)}$; b) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(123)}$.

30. Arătaţi că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să îndeplinească condiţia:

$$f(1 + x) + f(1 - x) = x.$$

Lecţia 9. Funcţii de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

Citesc şi reţin

Definiţie: Funcţia de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcţie liniară**.

Reprezentarea grafică a funcţiei liniare este o dreaptă.

Definiţie: Pentru $a \neq 0$, funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcţie de gradul I**.

Intersecţiile graficului funcţiei de gradul I cu axele de coordonate

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

– $G_f \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$;

– $G_f \cap Oy = B(0; b)$.

Cum se aplică?

1. Determinaţi punctul de pe graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ care are coordonatele egale.

Soluţie:

Determinăm punctul $M(x; f(x)) \in G_f$ cu proprietatea $x = f(x)$, deci ${}^{4)}x = \frac{x}{4} - {}^{4)}1$ sau $4x = x - 4$, aşadar $3x = -4$, de unde obţinem $x = -\frac{4}{3}$, prin urmare $M\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

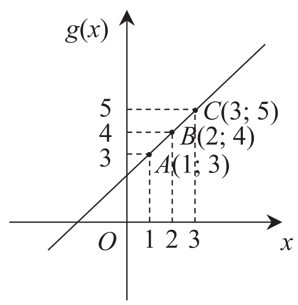
2. Reprezentaţi grafic în sistemul de axe ortogonale xOy funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$.

Soluţie:

Scriem tabelul de valori al funcţiei g pentru $x = 1$, $x = 2$ şi $x = 3$.

x	1	2	3
$g(x)$	3	4	5

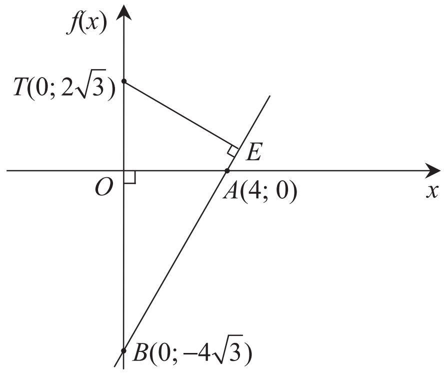
Deci, graficul funcţiei g conţine punctele $A(1; 3)$, $B(2; 4)$ şi $C(3; 5)$. Reprezentăm aceste puncte în sistemul de axe ortogonale xOy şi construim graficul.



3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$. Determinaţi distanţa de la punctul $T(0;\ 2\sqrt{3})$ la graficul funcţiei f.

Soluţie:

$G_f \cap Ox = A(4;\ 0)$ şi $G_f \cap Oy = B(0;\ -4\sqrt{3})$, deci dreapta AB este reprezentarea geometrică a funcţiei f în sistemul de axe ortogonale xOy. Construim $TE \perp AB$, $E \in AB$ şi observăm că $\Delta AOB \sim \Delta TEB$, deci $\dfrac{AO}{TE} = \dfrac{BA}{BT}$. În ΔAOB, cu $\sphericalangle O = 90°$, aplicăm teorema lui Pitagora: $AB^2 = AO^2 + BO^2$ şi obţinem $AB = 8u$, prin urmare avem $\dfrac{4}{TE} = \dfrac{8}{6\sqrt{3}}$ şi după efectuarea calculelor obţinem $TE = 3\sqrt{3}u$.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 5x - 3$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $A(0; -3) \in G_f$; ☐ b) $B(2; -6) \in G_f$; ☐

c) $C(-2; 7) \in G_f$; ☐ d) $D(-1; -8) \in G_f$. ☐

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$. Completaţi caseta cu semnul corespunzător „$\in$” sau „$\notin$”:

a) $M(8; 3)$ ☐ G_f; b) $N(2; 0)$ ☐ G_f; c) $P(-4; 3)$ ☐ G_f; d) $Q(-6; -4)$ ☐ G_f.

3. Stabiliţi dacă punctul $T(-1;\ 2)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = 3x + 5$; b) $f(x) = -x + 1$; c) $f(x) = 4x + 7$.

c)

4. Fie G_g graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = ax - 2$. Aflaţi numărul real a, ştiind că:

a) $A(2; -4) \in G_g$; b) $B(-4; 6) \in G_g$; c) $C(3; 5) \in G_g$.

b)

GEOMETRIE

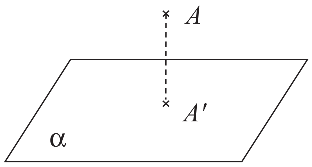
Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte

Citesc și rețin

Definiție: Proiecția unui punct exterior unui plan pe planul respectiv este piciorul perpendicularei construite din punctul respectiv pe acel plan.

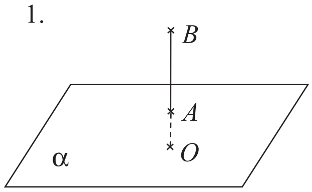


Notăm $pr_{\alpha} A = A'$.

Proiecția unui segment: Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul $A'B'$, ale cărui extremități sunt proiecțiile extremităților segmentului dat pe planul α.

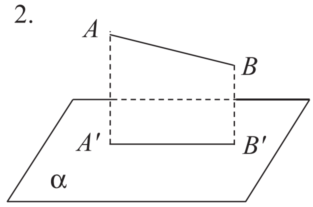
Observație: Proiecția segmentului *AB* pe planul α este:
1. un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe planul α;
2. un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe planul α.

1.



Notăm $pr_{\alpha} AB = O$.

2.

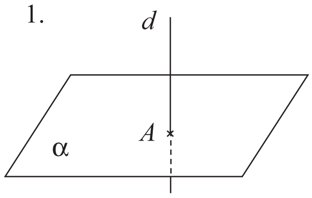


Notăm $pr_{\alpha} AB = A'B'$.

Proiecția unei drepte: Proiecția dreptei d pe planul α este dreapta determinată de proiecțiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d.

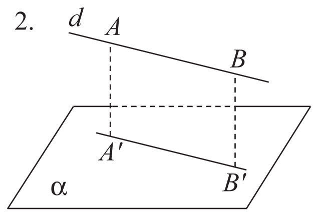
Observație: Proiecția dreptei *d* pe planul α este:
1. un punct, dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α;
2. o dreaptă, dacă dreapta d nu este perpendiculară pe planul α.

1.



Notăm $pr_{\alpha} d = A$.

2.



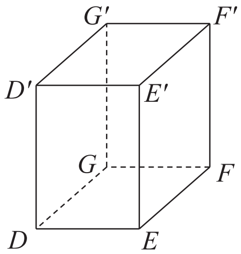
Notăm $pr_{\alpha} d = A'B'$.

Cum se aplică?

1. Se consideră prisma patrulateră regulată $DEFGD'E'F'G'$. Determinaţi:

a) $pr_{(DEF)} D'$; b) $pr_{(D'DG)} F'$.

Soluţie:

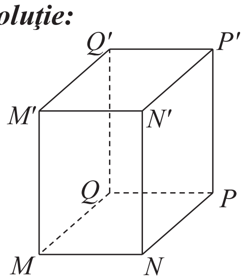


a) Deoarece $D'D \perp (DEF)$, rezultă că proiecţia punctului D' pe planul (DEF) este punctul D;
b) Deoarece $F'G' \perp (D'DG)$, rezultă că proiecţia punctului F' pe planul $(D'DG)$ este punctul G'.

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Determinaţi:

a) $pr_{(MNP)} N'P'$; b) $pr_{(M'MN)} NQ'$.

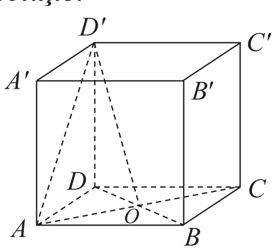
Soluţie:



a) Observăm că $pr_{(MNP)} N' = N$ şi $pr_{(MNP)} P' = P$, deci $pr_{(MNP)} N'P' = NP$;
b) Observăm că $pr_{(M'MN)} N = N$ şi $pr_{(M'MN)} Q' = M'$, deci $pr_{(M'MN)} NQ' = M'N$.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4 cm. Aflaţi lungimea proiecţiei segmentului AD' pe planul $(D'DB)$.

Soluţie:



$AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $AC \perp BD$ şi $AC \perp D'D$, rezultă că $AC \perp (B'BD)$, prin urmare $pr_{(D'DB)} A = O$ şi, deoarece $pr_{(D'DB)} D' = D'$, deducem că $pr_{(D'DB)} AD' = OD'$. În $\Delta D'DO$ cu $\sphericalangle D = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora rezultă că $D'O^2 = D'D^2 + DO^2$ şi după efectuarea calculelor obţinem $D'O = 2\sqrt{6}$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă proiecţia punctului E pe planul θ este punctul F, atunci:

A. $EF \parallel \theta$; B. $EF \perp \theta$.

2. Citiţi următoarele notaţii:

a) $pr_{\alpha} A = B$; b) $pr_{(ABC)} M = N$; c) $pr_{\beta} P = E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

11. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinaţi:

a) $pr_{(D'DB)}\, A'D'$; b) $pr_{(A'AC)}\, AB$; c) $pr_{(B'BD)}\, B'C$; d) $pr_{(A'AC)}\, AD'$.

12. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful în V, care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi muchia laterală de 5 cm. Calculaţi:

a) lungimea proiecţiei segmentului AD pe planul (VBD);
b) lungimea proiecţiei segmentului VB pe planul (VAC).

13. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm, în care notăm cu M mijlocul muchiei CD. Calculaţi:

a) lungimea proiecţiei segmentului AB pe planul (BCD);
b) lungimea proiecţiei segmentului AD pe planul (ABM).

14. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de $6\sqrt{2}$ cm. Aflaţi:

a) lungimea proiecţiei segmentului $D'B$ pe planul $(A'AD)$;
b) lungimea proiecţiei segmentului BC' pe planul $(B'BD)$.

15. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, care are muchia bazei de 8 cm şi înălţimea de $2\sqrt{7}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei $A'B'$.

a) Calculaţi lungimea proiecţiei segmentului AM pe planul $(A'AC)$.
b) Calculaţi lungimea proiecţiei segmentului CM pe planul $(B'BD)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă punctul B' se proiectează pe planul $(A'BC')$ în centrul de greutate al triunghiului $A'BC'$, arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

17. Arătaţi că o piramidă patrulateră regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, dacă şi numai dacă centrul bazei se proiectează pe planul unei feţe laterale în centrul cercului circumscris acesteia.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinaţi:

a) $pr_{(ABC)}\, D'$; b) $pr_{(B'BC)}\, A'$; c) $pr_{(B'BD)}\, C$.

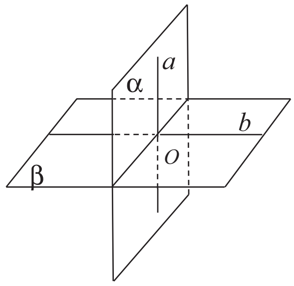
(3p) **2.** Se consideră prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$. Determinaţi:

a) $pr_{(M'N'P')}\, PQ$; b) $pr_{(N'NP)}\, M'P$; c) $pr_{(N'NQ)}\, MQ'$.

(3p) **3.** În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful în V, construim înălţimea VO, $O \in (ABC)$. Ştiind că piramida are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi muchia laterală de 6 cm, calculaţi lungimea proiecţiei muchiei VB pe planul (VAO).

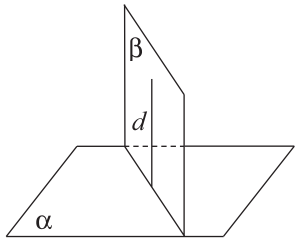
Lecţia 5. Plane perpendiculare

Citesc şi reţin



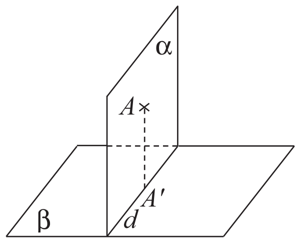
Definiţie: Planele α şi β se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului dintre ele este egală cu 90°.

Notăm $\alpha \perp \beta$.



Teoremă: Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci orice plan β care conţine dreapta d este perpendicular pe α.

$$\left.\begin{aligned} d \perp \alpha \\ d \subset \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$



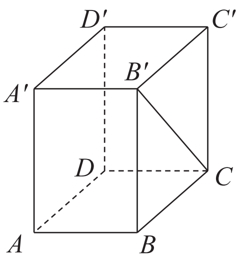
Teoremă: Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci proiecţia pe unul dintre plane a oricărui punct din celălalt plan aparţine dreptei de intersecţie a planelor.

$$\left.\begin{aligned} d \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ A \in \alpha \\ AA' \perp \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow A' \in d$$

Cum se aplică?

1. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Arătaţi că:
   a) $(ADD') \perp (CDD')$; b) $(A'B'C) \perp (B'BC)$.

Soluţie:

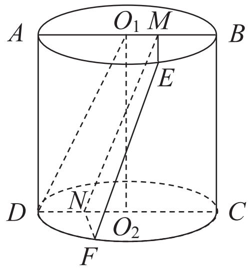


a) $(ADD') \cap (CDD') = DD'$, $AD \subset (ADD')$, $AD \perp DD'$, $CD \subset (CDD')$, $CD \perp DD'$, deci $\sphericalangle((ADD'), (CDD')) = \sphericalangle ADC = 90°$, prin urmare $(ADD') \perp (CDD')$;

b) Deoarece $A'B' \subset (A'B'C)$ şi $A'B' \perp (B'BC)$, rezultă că $(A'B'C) \perp (B'BC)$.

2. Dreptunghiul $ABCD$ este secţiunea axială a unui cilindru circular drept cu $R = 6$ cm şi $G = 8$ cm. Se consideră punctele E şi F pe cercurile de diametre AB, respectiv CD, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 3 \cdot \overset{\frown}{EB}$ şi $\overset{\frown}{CD} = 3 \cdot \overset{\frown}{FD}$. Calculaţi lungimea proiecţiei segmentului EF pe planul (ABC).

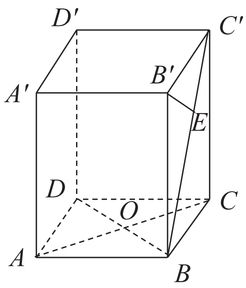
Soluţie:



Construim înălţimea O_1O_2 a cilindrului circular drept şi notăm cu M şi N proiecţiile punctelor E, respectiv F pe planul (ABC) şi, deoarece planul (ABC) este perpendicular pe planele bazelor, rezultă că $M \in AB$ şi $N \in CD$. $\overset{\frown}{AB} = 3 \cdot \overset{\frown}{EB}$, deci $3 \cdot \overset{\frown}{EB} = 180°$, de unde obţinem $\overset{\frown}{EB} = 60°$, prin urmare ΔO_1EB este echilateral, aşadar $O_1M = \frac{R}{2} = 3$ cm. Analog, se arată că $O_2N = 3$ cm. Deoarece $O_1M \equiv DN$ şi $O_1M \parallel DN$, rezultă că O_1MND este paralelogram, deci $MN \equiv O_1D$. În ΔO_1O_2D cu $\sphericalangle O_2 = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora rezultă că $O_1D^2 = O_1O_2^2 + DO_2^2$ şi obţinem $O_1D = 10$ cm, deci $MN = 10$ cm.

3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi muchia laterală de $4\sqrt{6}$ cm. Calculaţi:

a) d[A, $(B'BD)$]; b) d[B', (ABC')].



Soluţie:

a) $AC \cap BD = \{O\}$. $B'B \perp (ABC)$ şi $B'B \subset (B'BD)$, deci $(B'BD) \perp (ABC)$, prin urmare d[A, $(B'BD)$] $= AO = 4$ cm;

b) $AB \perp (B'BC)$ şi $AB \subset (ABC')$, deci $(ABC') \perp (B'BC)$. Construim $B'E \perp (ABC')$, $E \in BC'$ şi în $\Delta BB'C'$ avem $B'E = \frac{B'C' \cdot B'B}{BC'}$. În $\Delta BCC'$, cu $\sphericalangle C = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora obţinem $BC' = 8\sqrt{2}$ cm, prin urmare $B'E = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}}$ cm, deci $B'E = 2\sqrt{6}$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele notaţii:

a) $(ABC) \perp (DEF)$; b) $\alpha \perp \theta$; c) $(MNP) \perp (MNQ)$.

2. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Planele α şi β sunt perpendiculare dacă:

A. $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 30°$; B. $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 45°$;

C. $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 60°$; D. $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90°$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V şi $AC \cap BD = \{O\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\text{pr}_{(ABC)} V = O$; b) $\text{pr}_{(VBD)} BC = BO$.

(1p) **2.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Aflaţi măsurile unghiurilor:
a) $\sphericalangle((NPP'), (QPP'))$; b) $\sphericalangle((NMM'), (QMM'))$.

(1p) **3.** Triunghiul dreptunghic VAB este secţiunea axială a unui con circular drept cu vârful în V. Aflaţi măsura unghiului dintre generatoarea VA şi planul bazei.

(1p) **4.** Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, are muchia bazei de 6 cm şi înălţimea de $3\sqrt{5}$ cm. Calculaţi d$[(C', (B'CD)]$.

(2p) **5.** În prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, cu muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi înălţimea de $6\sqrt{2}$ cm, notăm cu M şi N mijloacele muchiilor EF, respectiv $D'E'$.
a) Aflaţi $\sphericalangle((D'F'F), (NF'F))$. b) Calculaţi $\mathcal{A}_{DE'M}$.

(3p) **6.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de $4\sqrt{2}$ cm notăm cu M mijlocul muchiei $A'D'$. Aflaţi:
a) $\sphericalangle((A'C'C), (D'C'C))$; b) d$(M, AC)$; c) $\sphericalangle(B'C, (B'BD))$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\text{pr}_{(DEF)} D' = E$; b) $\text{pr}_{(DEF)} E'F = EF$.

(1p) **2.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Aflaţi măsurile unghiurilor:
a) $\sphericalangle(B'C, (A'B'C'))$; b) $\sphericalangle((A'AB), (BAD))$.

(1p) **3.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de $4\sqrt{6}$ cm. Ştiind că $\sphericalangle(VA, (ABC)) = 30°$, calculaţi înălţimea piramidei.

(1p) **4.** Calculaţi lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, ştiind că $AA' = 6$ cm, d$(B', AD) = 3\sqrt{5}$ cm şi d$(B', CD) = 2\sqrt{10}$ cm.

(2p) **5.** Prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$ are muchia bazei de $3\sqrt{2}$ cm şi $\sphericalangle(N'Q, (MNP)) = 45°$.
a) Calculaţi d$[M', (Q'MN)]$; b) Aflaţi $\sphericalangle(N'Q, (N'NP))$.

(3p) **6.** În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu muchia de $2\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de 6 cm, notăm cu M mijlocul muchiei laterale AA'. Aflaţi:
a) $\sphericalangle(BC', (A'B'C'))$; b) $\mathcal{A}_{BMC'}$; c) $\sphericalangle((BMC'), (ABC))$.

Capitolul II

Arii şi volume ale unor corpuri geometrice

II.1. Poliedre

Definiţie: Un corp geometric care este mărginit numai de feţe plane se numeşte **poliedru**.

Definiţii:

Aria laterală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_l$, reprezintă suma ariilor feţelor laterale ale poliedrului.

Aria totală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a poliedrului şi aria bazei (bazelor).

Volumul unui poliedru, notat $\mathcal{V}$, reprezintă spaţiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Lecţia 6. Prisma regulată

Citesc şi reţin

Notaţii utilizate: h – lungimea înălţimii prismei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a prismei, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a prismei, $\mathcal{V}$ – volumul prismei.

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h$, $\qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, $\qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h$.

Cum se aplică?

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, care are muchia bazei de 4 cm şi aria laterală egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2. Calculaţi:

a) h; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

Soluţie:

a) $\mathcal{A}_l = 48\sqrt{3}$ cm^2, deci $\mathcal{P}_b \cdot h = 48\sqrt{3}$ cm^2 sau $12 \cdot h$ cm $= 48\sqrt{3}$ cm^2, de unde rezultă că $h = \frac{48\sqrt{3}}{12}$ cm şi obţinem $h = 4\sqrt{3}$ cm;

b) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + 2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + \frac{16\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2 =$ $= 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + 8\sqrt{3}\text{ cm}^2 = 56\sqrt{3}\text{ cm}^2$;

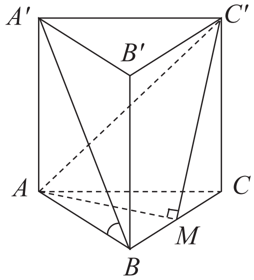
c) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}^3 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}^3 = 48\text{ cm}^3$.

2. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei de $2\sqrt{2}$ cm şi muchia laterală de $2\sqrt{6}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei BC. Aflaţi:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(A'B, (ABC))$; d) $\mathcal{A}_{C'MA}$.

Soluţie:

a) $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3l \cdot h = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}$ cm^2 = $12\sqrt{12}$ cm^2 = $12\sqrt{2^2 \cdot 3}$ cm^2 = = $24\sqrt{3}$ cm^2;



b) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6}$ cm^3 =

$= \dfrac{(8\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{6})}{4}$ cm^3 = $12\sqrt{2}$ cm^3;

c) $\sphericalangle(A'B, (ABC)) = \sphericalangle A'BA$. În $\Delta A'BA$ cu $\sphericalangle A = 90°$, tg$(\sphericalangle B)$ =

$= \dfrac{A'A}{AB} = \dfrac{2\sqrt{6}\text{ cm}}{2\sqrt{2}\text{ cm}} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle A'BA = 60°$;

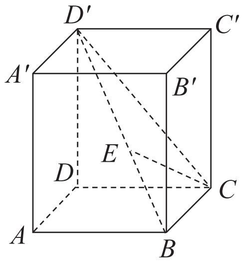
d) Arătăm că $\Delta C'MA$ este dreptunghic, aplicând teorema celor 3 perpendiculare: $C'C \perp (ABC)$, $CB \subset (ABC)$, $AM \subset (ABC)$ şi $AM \perp BC$, deci $C'M \perp AM$, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA} = \dfrac{C'M \cdot AM}{2}$. Din $\Delta C'CM$ cu $\sphericalangle C = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că $C'M^2 = C'C^2 + CM^2$, deci $C'M^2 = (2\sqrt{6})^2 + \sqrt{2}^2$, aşadar $C'M^2 = 26$ cm şi obţinem $C'M = \sqrt{26}$ cm. $AM = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$ cm = $\sqrt{6}$ cm, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA}$ =

$= \dfrac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}{2}$ cm^2 = $\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 39}}{2}$ cm^2 = $\dfrac{2\sqrt{39}}{2}$ cm^2 = $\sqrt{39}$ cm^2.

3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia bazei de $3\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de $3\sqrt{6}$ cm. Calculaţi:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{V}$; c) măsura $\sphericalangle(BD', (A'AD))$; d) d$(C, BD')$.

Soluţie:



a) $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}$ cm^2 = $36\sqrt{18}$ cm^2 = $108\sqrt{2}$ cm^2;

b) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = l^2 \cdot h = 27 \cdot 3\sqrt{6}$ cm^3 = $81\sqrt{6}$ cm^3;

c) Deoarece $BA \perp (A'AD)$, rezultă că $\sphericalangle(BD', (A'AD))$ = $= \sphericalangle AD'B$. În $\Delta AD'B$ cu $\sphericalangle A = 90°$, tg$(\sphericalangle D') = \dfrac{AB}{D'A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, prin urmare $\sphericalangle AD'B = 30°$;

d) Construim $CE \perp BD'$, $E \in BD'$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta CC'D'$ cu $\sphericalangle C' = 90°$, rezultă că $D'C^2 = C'C^2 + C'D'^2$, deci $D'C^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'C^2 = 54 + 27$, aşadar $D'C^2 = 81$, prin urmare $D'C = \sqrt{81}$ cm şi obţinem $CD' = 9$ cm. Analog, din $\Delta BCD'$ cu $\sphericalangle C = 90°$, cu teorema lui Pitagora rezultă că $D'B^2 = D'C^2 + BC^2$, deci $D'B^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'B^2 = 81 + 27$, aşadar $D'B^2 = 108$, prin urmare $D'B = \sqrt{108}$ cm şi obţinem $BD' = 6\sqrt{3}$ cm. În $\Delta BCD'$ avem CE =

$= \dfrac{CB \cdot CD'}{BD'} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 9}{6\sqrt{3}}$ cm = $\dfrac{27\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$ cm = $\dfrac{9}{2}$ cm = 4,5 cm.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

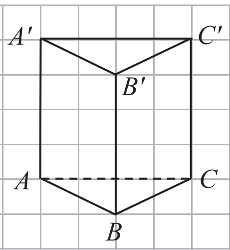
a) Dacă $l = 4$ cm și $h = 3\sqrt{3}$ cm, aflați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

b) Dacă $l = 2\sqrt{3}$ cm și $h = 7$ cm, aflați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

c) Dacă $l = 6$ cm și $\mathcal{A}_l = 90$ cm^2, aflați $\mathcal{P}_b$, h, $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{A}_l = 48$ cm^2, aflați $\mathcal{P}_b$, l, $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.

c)



2. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

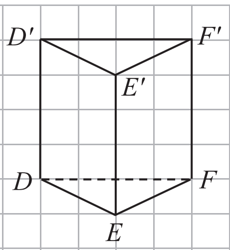
a) Dacă $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 10\sqrt{3}$ cm^3, aflați $\mathcal{A}_b$, h, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

b) Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ cm^3, aflați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

c) Dacă $\mathcal{A}_l = 54\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 60\sqrt{3}$ cm^2, aflați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $\mathcal{A}_l = 72\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 90\sqrt{3}$ cm^2, aflați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

b)



Ce notă merit? Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu $L = 4$ cm, $l = 3$ cm şi $h = 5$ cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) d.

(3p) **2.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm şi $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. $BC' \cap CB' = \{O\}$. Calculaţi:
a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $\mathcal{P}_{AOA'}$.

(3p) **3.** Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AD = 2\sqrt{3}$ cm şi $AA' = 3\sqrt{2}$ cm are $\mathcal{V} = 36$ cm^3. Calculaţi:
a) d[$(A'AD)$, $(B'BD)$]; b) d; c) $\sphericalangle((B'AD), (A'AD))$.

Lecţia 8. Cubul

Citesc şi reţin

Notaţii utilizate: l – lungimea muchiei cubului, d – lungimea diagonalei cubului, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a cubului, $\mathcal{V}$ – volumul cubului.

$d = l\sqrt{3}$, $\mathcal{A}_t = 6l^2$, $\mathcal{V} = l^3$.

Cum se aplică?

1. Un cub are muchia de $2\sqrt{2}$ cm. Calculaţi d, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$.

Soluţie:

$d = l\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ cm $= 2\sqrt{6}$ cm; $\mathcal{A}_t = 6l^2 = 6\cdot(2\sqrt{2})^2$ cm$^2 = 6\cdot 8$ cm$^2 = 48$ cm^2;
$\mathcal{V} = l^3 = (2\sqrt{2})^3$ cm$^3 = 8\sqrt{2^3}$ cm$^3 = 8\sqrt{2^2\cdot 2}$ cm$^3 = 16\sqrt{2}$ cm^3.

2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, care are lungimea muchiei egală cu 3 cm. Determinaţi:
a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(B'C', AD')$; d) d$(B', CD)$.

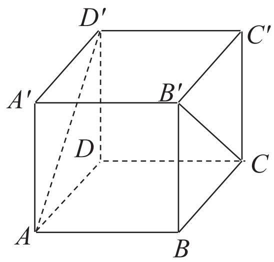
Soluţie:

a) $\mathcal{A}_t = 6l^2 = 6\cdot 3^2$ cm$^2 = 6\cdot 9$ cm$^2 = 54$ cm^2;

b) $\mathcal{V} = l^3 = 3^3$ cm$^3 = 27$ cm^3;

c) Deoarece $B'C' \parallel A'D'$, rezultă că $\sphericalangle(B'C', AD') = \sphericalangle(A'D', AD') = \sphericalangle A'D'A = 45°$;

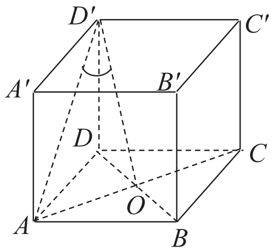
d) Aplicăm teorema celor 3 perpendiculare: $B'B \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, $CD \subset (ABC)$ şi $BC \perp CD$, aşadar $B'C \perp CD$, prin urmare d$(B', CD) = B'C = 3\sqrt{2}$ cm.



3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, care are aria totală egală cu 144 cm^2. Determinaţi:

a) l; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(D'A, (D'DB))$; d) d$(C, BD')$.

Soluţie:



a) $\mathcal{A}_t$ = 144 cm^2 sau $6l^2$ = 144 cm^2, deci l^2 = 24 cm^2, aşadar $l = \sqrt{24}$ cm şi obţinem $l = 2\sqrt{6}$ cm;

b) $\mathcal{V} = l^3 = (2\sqrt{6})^3$ cm^3 = $48\sqrt{6}$ cm^3;

c) $AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $\text{pr}_{(D'DB)}A = O$, rezultă că $\text{pr}_{(D'DB)}\, D'A = D'O$, prin urmare $\sphericalangle(D'A, (D'DB)) = \sphericalangle AD'O$.

În $\Delta D'AO$ cu $\sphericalangle O = 90°$, $\sin \sphericalangle D' = \dfrac{AO}{D'A} = \dfrac{1}{2}$, prin urmare $\sphericalangle AD'O = 30°$;

d) Construim $CE \perp BD'$, $E \in BD'$. În $\Delta BCD'$ cu $\sphericalangle C = 90°$, CE este înălţime, deci

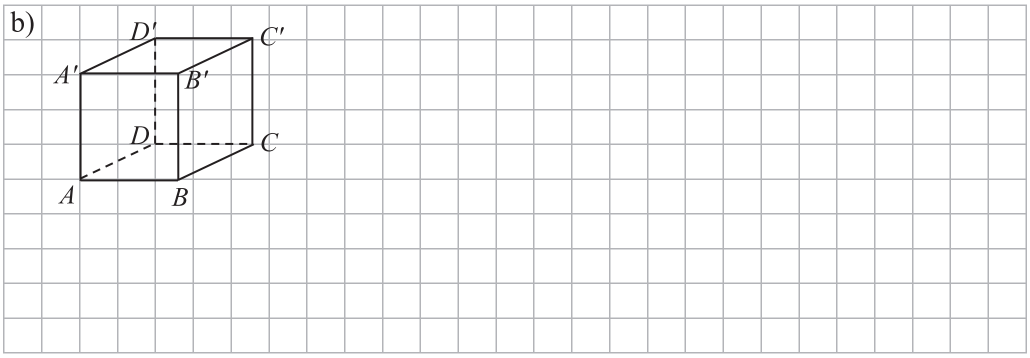
$$CE = \frac{CB \cdot CD'}{BD'} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \text{ cm} = 4 \text{ cm.}$$

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

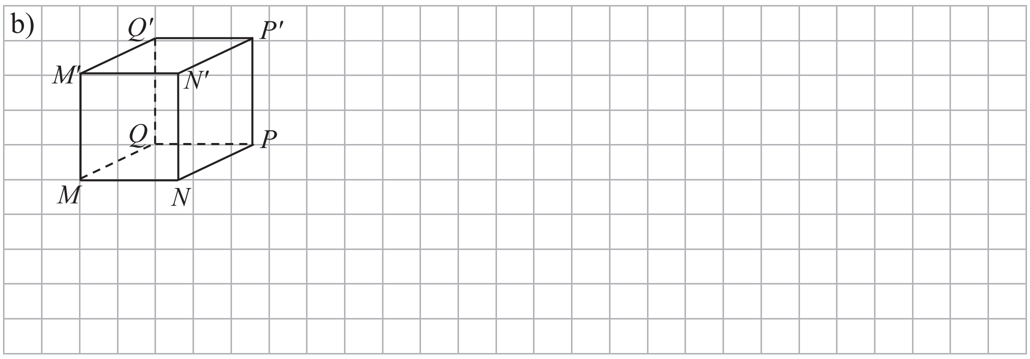
1. Se consideră un cub. Calculaţi d, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$, în următoarele cazuri:

a) $l = 3$ cm; b) $l = 4$ cm.



2. Se consideră un cub. Calculaţi l, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$, ştiind că:

a) $d = 5\sqrt{3}$ cm; b) $d = 6\sqrt{2}$ cm.



Lecţia 9. Piramida regulată

Citesc şi reţin

Notaţii utilizate: a_b – lungimea apotemei bazei piramidei, a_p – lungimea apotemei piramidei, h – lungimea înălţimii piramidei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a piramidei, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a piramidei, $\mathcal{V}$ – volumul piramidei.

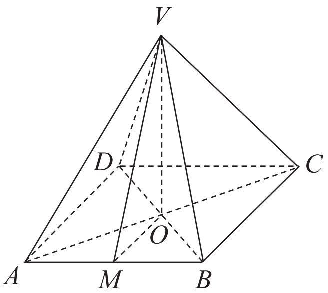
$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \frac{\mathcal{P}_b(a_p + a_b)}{2}, \qquad \mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}.$$

Cum se aplică?

1. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm şi muchia laterală de $3\sqrt{5}$ cm. Calculaţi:

a) a_p; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

Soluţie:



a) Construim apotema VM, $M \in AB$. În ΔVAM cu $\sphericalangle M = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, de unde obţinem $a_p = 6$ cm;

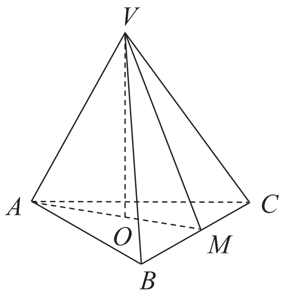
b) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} + l^2 = 72\ \text{cm}^2 + 36\ \text{cm}^2 = 108\ \text{cm}^2$;

c) $AC \cap BD = \{O\}$. În ΔVOM cu $\sphericalangle O = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $a_p^2 = h^2 + a_b^2$, de unde obţinem $h = 3\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3 = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

2. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful în V, care are muchia bazei de 6 cm şi aria laterală egală cu $9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$. Calculaţi:

a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{P}_f$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(VA, (ABC))$.

Soluţie:



a) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 9\sqrt{15}\ \text{cm}^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{15}\ \text{cm}^2 + 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}(1+\sqrt{5})\ \text{cm}^2$;

b) $\mathcal{A}_l = 9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$, deci $\frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} = 9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$, prin urmare $\frac{18a_p}{2}\ \text{cm} = 9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$, deci $18a_p = 18\sqrt{15}$ cm, de unde rezultă că $a_p = \sqrt{15}$ cm. Construim apotema VM a piramidei, $M \in BC$. În ΔVMB cu $\sphericalangle M = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, deci $m^2 = \sqrt{15}^2 + 3^2$ sau $m^2 = 24$, prin urmare $m = \sqrt{24}$ cm şi obţinem $m = 2\sqrt{6}$ cm. $\mathcal{P}_f = 2m + l =$ $= 4\sqrt{6}$ cm + 6 cm = $2(3+2\sqrt{6})$ cm;

c) $l = R\sqrt{3}$, deci $6 = R\sqrt{3}$, de unde obţinem $R = 2\sqrt{3}$ cm. În ΔVOA cu $\sphericalangle O = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = R^2 + h^2$, deci $(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + h^2$, aşadar $24 =$ $= 12 + h^2$, de unde rezultă că $h^2 = 12$, prin urmare $h = \sqrt{12}$ cm şi obţinem $h = 2\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3}$ cm^3 = 18 cm^3;

d) Observăm că $\text{pr}_{(ABC)}VA = AO$, deci $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO$. În ΔVAO cu $\sphericalangle O = 90°$, $\sin \sphericalangle A = \frac{VO}{VA} = \frac{2\sqrt{3}\text{ cm}}{2\sqrt{6}\text{ cm}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\sphericalangle VAO = 45°$.

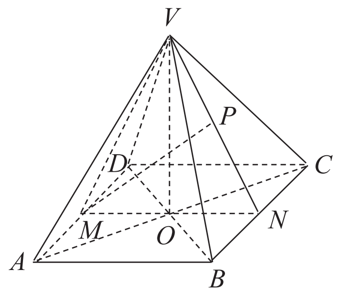
3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V, care are muchia bazei de $2\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de $\sqrt{6}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei AD. Calculaţi:

a) $\mathcal{V}$; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\sphericalangle(AD, VB)$; d) d[M, (VBC)].

Soluţie:

a) $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6}}{3}$ cm^3 $= \frac{12\sqrt{6}}{3}$ cm^3 $= 4\sqrt{6}$ cm^3;

b) $AC \cap BD = \{O\}$. Construim apotema VN, $N \in BC$. În ΔVON cu $\sphericalangle O = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $a_p^2 = h^2 + a_b^2$, deci $a_p^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2$, aşadar $a_p^2 = 9$, prin urmare $a_p = \sqrt{9}$ cm şi obţinem $a_p = 3$ cm. $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} =$ $= \frac{8\sqrt{3} \cdot 3}{2}$ cm^2 = $12\sqrt{3}$ cm^2;



c) Deoarece $AD \parallel BC$, rezultă că $\sphericalangle(AD, VB) = \sphericalangle(BC, VB) = \sphericalangle VBC$. În ΔVBN cu $\sphericalangle N = 90°$, $\text{tg}(\sphericalangle B) = \frac{VN}{BN} = \frac{3\text{ cm}}{\sqrt{3}\text{ cm}} = \sqrt{3}$, prin urmare $\sphericalangle VBC = 60°$;

d) Construim $MP \perp (VBC)$, $P \in VN$, deoarece $(VMN) \perp (VBC)$; $\mathcal{A}_{VMN} = \frac{MP \cdot VN}{2}$ sau $\frac{MP \cdot VN}{2} = \frac{MN \cdot VO}{2}$, deci $MP \cdot 3$ cm = $6\sqrt{2}$ cm^2, de unde rezultă că $MP = 2\sqrt{2}$ cm.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V. Utilizând notaţiile specifice piramidei regulate, rezolvaţi următoarele probleme.

a) Dacă $l = 4$ cm şi $a_p = 3\sqrt{3}$ cm, aflaţi $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$ şi $\mathcal{A}_t$.

b) Dacă $l = 2$ cm şi $a_p = 5\sqrt{3}$ cm, aflaţi $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$ şi $\mathcal{A}_t$.

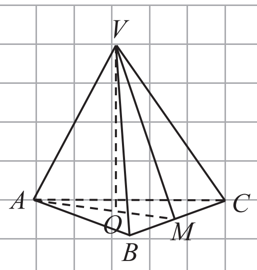
c) Dacă $l = 2$ cm şi $\mathcal{A}_l = 6\sqrt{2}$ cm^2, aflaţi $\mathcal{P}_b$, a_p şi m.

d) Dacă $a_p = 3$ cm şi $\mathcal{A}_l = 9\sqrt{3}$ cm^2, aflaţi $\mathcal{P}_b$, l şi m.

e) Dacă $l = 6$ cm şi $h = 4$ cm, aflaţi $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{V}$, R şi m.

f) Dacă $l = 6$ cm şi $h = 6$ cm, aflaţi $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{V}$, R şi m.

d)



2. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V. Utilizând notaţiile specifice piramidei regulate, rezolvaţi următoarele probleme.

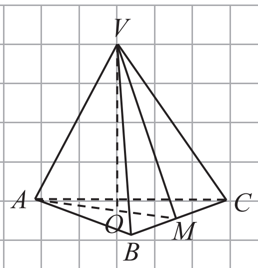
a) Dacă $l = 6$ cm şi $\mathcal{V} = 15\sqrt{3}$ cm^3, aflaţi $\mathcal{A}_b$, h, a_b, a_p, $\mathcal{P}_b$ şi $\mathcal{A}_l$.

b) Dacă $h = 4$ cm şi $\mathcal{V} = 16\sqrt{3}$ cm^3, aflaţi $\mathcal{A}_b$, l, a_b, a_p, $\mathcal{P}_b$ şi $\mathcal{A}_l$.

c) Dacă $\mathcal{A}_l = 12\sqrt{3}$ cm^2 şi $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3}$ cm^2, aflaţi $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, a_p şi m.

d) Dacă $\mathcal{A}_l = 24\sqrt{3}$ cm^2 şi $\mathcal{A}_t = 36\sqrt{3}$ cm^2, aflaţi $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, a_p şi m.

d)



Lecţia 10. Trunchiul de piramidă regulată

Citesc şi reţin

Notaţii utilizate: a_t – lungimea apotemei trunchiului de piramidă, i – lungimea înălţimii trunchiului de piramidă, $\mathscr{P}_B$ – perimetrul bazei mari, $\mathscr{P}_b$ – perimetrul bazei mici, $\mathscr{A}_B$ – aria bazei mari, $\mathscr{A}_b$ – aria bazei mici, $\mathscr{A}_l$ – aria laterală a trunchiului de piramidă, $\mathscr{A}_t$ – aria totală a trunchiului de piramidă, $\mathscr{V}$ – volumul trunchiului de piramidă.

$$\mathscr{A}_l = \frac{(\mathscr{P}_B + \mathscr{P}_b)\cdot a_t}{2}, \qquad \mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + \mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b,$$

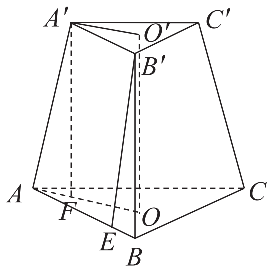
$$\mathscr{V} = \frac{i}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right).$$

Cum se aplică?

1. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{3}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{3}$ cm şi muchia laterală de $2\sqrt{7}$ cm. Calculaţi:

a) a_t; b) $\mathscr{A}_l$; c) $\mathscr{V}$.

Soluţie:



a) Construim $B'E \perp AB$, $E \in AB$, deci $BE = \frac{L-l}{2} = \sqrt{3}$ cm. În $\Delta B'BE$ cu $\sphericalangle E = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$, de unde obţinem $a_t = 5$ cm;

b) $\mathscr{A}_l = \frac{(\mathscr{P}_B + \mathscr{P}_b)\cdot a_t}{2} = \frac{30\sqrt{3}\cdot 5}{2}$ cm^2 = $75\sqrt{3}$ cm^2;

c) Notăm cu O şi O' centrele celor două baze şi construim $A'F \perp AO$, $F \in AO$. $L = R\sqrt{3}$, deci $6\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, de unde obţinem $R = 6$ cm şi, analog, rezultă că $r = 4$ cm; $AF = R - r = 2$ cm. În $\Delta A'AF$ cu $\sphericalangle F = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R-r)^2$, de unde obţinem $i = 2\sqrt{6}$ cm; $\mathscr{V} = \frac{i}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right)$ şi după efectuarea calculelor obţinem $\mathscr{V} = 114\sqrt{2}$ cm^3.

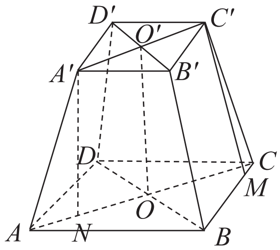
2. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia laterală de $3\sqrt{6}$ cm şi apotema de 6 cm. Aflaţi:

a) l; b) $\mathscr{A}_l$; c) $\mathscr{V}$; d) h.

Soluţie:

a) Construim $C'M \perp BC$, $M \in BC$. În $\Delta C'MC$ cu $\sphericalangle M = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$ sau $\frac{8\sqrt{2}-l}{2} = 3\sqrt{2}$, de unde obţinem $l = 2\sqrt{2}$ cm;

b) $\mathscr{A}_l = \frac{(\mathscr{P}_B + \mathscr{P}_b)\cdot a_t}{2} = \frac{40\sqrt{2}\cdot 6}{2}$ cm^2 = $120\sqrt{2}$ cm^2;



c) Construim $A'N \perp (ABC)$, $N \in AC$, deci $AN = R - r =$ $= 6$ cm. În $\Delta A'NA$ cu $\sphericalangle N = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obţinem $i = 3\sqrt{2}$ cm. $\mathscr{V} =$ $= \frac{i}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right) = \sqrt{2}(128+8+32)$ cm^3 $=$ $= 168\sqrt{2}$ cm^3;

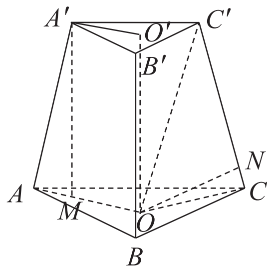
d) Aplicăm teorema piramidelor asemenea: $\frac{l}{L} = \frac{h-i}{h}$, deci $\frac{1}{4} = \frac{h-3\sqrt{2}}{h}$, de unde obţinem $h = 4\sqrt{2}$ cm.

3. În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei mari de 6 cm, muchia bazei mici de 3 cm şi muchia laterală de $2\sqrt{3}$ cm, notăm cu O centrul bazei mari ABC. Calculaţi:

a) i; b) $\mathscr{V}$; c) $\sphericalangle(AA', (ABC))$; d) d$(O, CC')$.

Soluţie:

a) Notăm cu O' centrul bazei mici şi construim $A'M \perp AO$, $M \in AO$. $L = R\sqrt{3}$, deci $6 = R\sqrt{3}$, de unde obţinem $R =$ $= 2\sqrt{3}$ cm şi, analog, rezultă că $r = \sqrt{3}$ cm. În $\Delta A'AM$ cu $\sphericalangle M = 90°$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obţinem $i = 3$ cm;



b) $\mathscr{V} = \frac{i}{3}\left(\mathscr{A}_B + \mathscr{A}_b + \sqrt{\mathscr{A}_B \cdot \mathscr{A}_b}\right)$ şi după efectuarea calculelor obţinem $\mathscr{V} = \frac{63\sqrt{3}}{4}$ cm^3;

c) $\sphericalangle(AA', (ABC)) = \sphericalangle A'AM$. În $\Delta A'AM$ cu $\sphericalangle M = 90°$, $\sin A = \frac{A'M}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\sphericalangle A'AM = 60°$;

d) Construim $ON \perp CC'$, $N \in CC'$. Observăm că $\mathscr{A}_{O'OCC'} = \mathscr{A}_{O'OC'} + \mathscr{A}_{OCC'}$ sau $\frac{3\sqrt{3}\cdot 3}{2}$ cm^2 $= \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ cm^2 $+ \frac{ON\cdot 2\sqrt{3}}{2}$ cm^2 şi, efectuând calculele, obţinem $ON = 3$ cm.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

7. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de 12 cm, muchia bazei mici de 4 cm şi apotema de 5 cm. Aflaţi:
a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) i; d) $\mathcal{V}$.

8. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $12\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de $6\sqrt{2}$ cm şi apotema de $3\sqrt{2}$ cm. Aflaţi:
a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) i; d) $\mathcal{V}$.

9. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{6}$ cm, muchia bazei mici de $2\sqrt{6}$ cm şi muchia laterală de 7 cm. Aflaţi:
a) a_t; b) $\mathcal{A}_l$; c) i; d) $\mathcal{V}$.

10. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de 12 cm, muchia bazei mici de 6 cm şi muchia laterală de 6 cm. Aflaţi:
a) a_t; b) $\mathcal{A}_l$; c) i; d) $\mathcal{V}$.

11. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de $2\sqrt{2}$ cm şi înălţimea de $3\sqrt{2}$ cm. Aflaţi:
a) $\mathcal{V}$; b) a_t; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{P}_f$.

12. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{3}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de $2\sqrt{6}$ cm. Aflaţi:
a) $\mathcal{V}$; b) $\mathcal{P}_f$; c) a_t; d) $\mathcal{A}_t$.

13. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $9\sqrt{6}$ cm, muchia bazei mici de $3\sqrt{6}$ cm şi muchia laterală de 12 cm. Calculaţi:
a) $\mathcal{A}_l$; b) i; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(AB, A'C')$.

14. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mici de 6 cm, muchia laterală de 6 cm şi înălţimea de $3\sqrt{2}$ cm. Calculaţi:
a) L; b) $\mathcal{V}$; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\sphericalangle(A'A, (ABC))$.

15. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $4\sqrt{3}$ cm, muchia bazei mici de $2\sqrt{3}$ cm şi aria laterală egală cu 27 cm^2. Calculaţi:
a) a_t; b) $\mathcal{P}_f$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(AC, B'C')$.

16. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de 8 cm, muchia laterală de 5 cm şi apotema de 4 cm. Calculaţi:
a) l; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(BC, D'C')$.

17. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mici de $2\sqrt{3}$ cm, apotema de 6 cm şi aria laterală egală cu $90\sqrt{3}$ cm^2. Calculaţi:
a) L; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle((B'BC), (ABC))$.

18. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{6}$ cm, muchia bazei mici de $2\sqrt{6}$ cm şi volumul egal cu 104 cm^3. Calculaţi:
a) i; b) $\mathcal{A}_l$; c) h; d) $\sphericalangle(A'C', BD)$.

19. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{3}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{3}$ cm şi volumul egal cu $38\sqrt{6}$ cm^3. Aflaţi:
a) i; b) $\mathcal{P}_f$; c) $\mathcal{A}_l$; d) h.

(3p) **6.** În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V notăm cu M şi N mijloacele muchiilor BC, respectiv CV, $AM \cap BD = \{E\}$ şi $BN \cap VM = \{F\}$. Piramida are muchia bazei şi muchia laterală de aceeaşi lungime, 6 cm. Calculaţi:

a) $\mathcal{V}$; b) $\sphericalangle(EF, AC)$; c) $\mathcal{A}_{VAM}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VIII-a
Capitolul: Arii şi volume ale unor corpuri geometrice (Lecţiile 9 şi 10)
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Aria laterală a piramidei triunghiulare regulate cu $l = 4$ cm şi $a_p = 3$ cm este egală cu 18 cm^2. A F

(7p) **2.** Aria totală a tetraedrului regulat cu muchia de 3 cm este egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2. A F

(7p) **3.** Înălţimea piramidei patrulatere regulate cu $l = 2$ cm şi $\mathcal{V} = 4$ cm^3 este egală cu 3 cm. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Aria totală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată cu $L = 4$ cm, $l = 2$ cm şi $\mathcal{A}_l = 27\sqrt{3}$ cm^2 este egală cu ....

(7p) **2.** Aria laterală a piramidei hexagonale regulate cu $l = 2\sqrt{2}$ cm şi $a_p = 3\sqrt{2}$ cm este egală cu ....

(7p) **3.** Volumul piramidei patrulatere regulate cu $\mathcal{P}_b = 12$ cm şi $h = 4$ cm este egal cu ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Volumul piramidei patrulatere regulate care are secţiunea diagonală un triunghi echilateral cu perimetrul de 18 cm este egal cu:

A. 24 cm^3; B. $16\sqrt{2}$ cm^3; C. $18\sqrt{3}$ cm^3; D. 40 cm^3.

(8p) **2.** Aria laterală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată cu $l = 3\sqrt{2}$ cm, $m = 3\sqrt{3}$ cm şi $a_t = 5$ cm este egală cu:

A. $20\sqrt{3}$ cm^2; B. $30\sqrt{6}$ cm^2; C. $40\sqrt{5}$ cm^2; D. $60\sqrt{2}$ cm^2.

(8p) **3.** Înălţimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă patrulateră regulată cu $L = 6$ cm, $l = 2$ cm şi $i = 2\sqrt{5}$ cm este egală cu:

A. $4\sqrt{3}$ cm; B. 4 cm; C. 6 cm; D. $3\sqrt{5}$ cm.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. *(8p)* Un tetraedru regulat are volumul egal cu $18\sqrt{2}$ cm^3. Calculați suma lungimilor muchiilor tetraedrului regulat.

V. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V notăm cu O centrul bazei și cu M mijlocul muchiei CV. Piramida are apotema de $2\sqrt{6}$ cm și aria laterală egală cu $36\sqrt{6}$ cm^2.

(8p) a) Calculați $\mathcal{V}$.

(8p) b) Aflați $\sin(\sphericalangle(VB, OM))$.

II.2. Corpuri rotunde

Definiţie: Un corp geometric care este mărginit parţial sau total de suprafeţe neplane (curbe) se numeşte **corp rotund**.

Corpurile rotunde studiate în acest capitol sunt: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept şi sfera.

Definiţii:

Aria laterală a unui corp rotund, notată $\mathscr{A}_l$, reprezintă aria suprafeţei laterale a acestuia.

Aria totală a unui corp rotund, notată $\mathscr{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a corpului rotund şi aria bazei (bazelor).

Volumul unui corp rotund, notat $\mathscr{V}$, reprezintă spaţiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Lecţia 11. Cilindrul circular drept

Citesc şi reţin

Notaţii utilizate: R – raza cilindrului circular drept, G – lungimea generatoarei cilindrului circular drept, h – lungimea înălţimii cilindrului circular drept, $\mathscr{A}_b$ – aria bazei cilindrului circular drept, $\mathscr{A}_l$ – aria laterală a cilindrului circular drept, $\mathscr{A}_t$ – aria totală a cilindrului circular drept, $\mathscr{V}$ – volumul cilindrului circular drept.

$$\mathscr{A}_l = 2\pi RG, \qquad \mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + 2\mathscr{A}_b = 2\pi R(G + R),$$

$$\mathscr{V} = \mathscr{A}_b \cdot h = \pi R^2 h.$$

Cum se aplică?

1. Se consideră un cilindru circular drept cu $R = 4$ cm şi $G = 5$ cm. Aflaţi $\mathscr{A}_l$, $\mathscr{A}_t$ şi $\mathscr{V}$.

Soluţie:

$\mathscr{A}_l = 2\pi RG = 2\pi \cdot 4 \cdot 5\text{ cm}^2 = 40\pi\text{ cm}^2$; $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + 2\mathscr{A}_b = 40\pi\text{ cm}^2 + 2\pi R^2 = 40\pi\text{ cm}^2 + 32\pi\text{ cm}^2 = 72\pi\text{ cm}^2$; $\mathscr{V} = \mathscr{A}_b \cdot h = 16\pi \cdot 5\text{ cm}^3 = 80\pi\text{ cm}^3$.

2. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu $30\pi\text{ cm}^2$ şi aria totală egală cu $48\pi\text{ cm}^2$. Calculaţi:

a) R; b) G.

Soluţie:

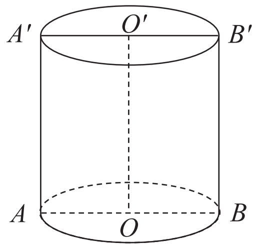
a) $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + 2\mathscr{A}_b$, deci $48\pi\text{ cm}^2 = 30\pi\text{ cm}^2 + 2\mathscr{A}_b$, de unde rezultă că $2\mathscr{A}_b = 18\pi\text{ cm}^2$ sau $\mathscr{A}_b = 9\pi\text{ cm}^2$, prin urmare $\pi R^2 = 9\pi$, deci $R^2 = 9\text{ cm}^2$ şi obţinem $R = 3$ cm;

b) $\mathscr{A}_l = 30\pi\text{ cm}^2$, deci $2\pi RG = 30\pi\text{ cm}^2$ sau $6\pi G = 30\pi$ cm, de unde obţinem $G = 5$ cm.

3. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu 24π cm^2 şi volumul egal cu $24\sqrt{2}\,\pi$ cm^3. Aflaţi:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_t$.

Soluţie:



a) $\mathcal{A}_l = 24\pi$ cm^2 sau $2\pi RG = 24\pi$ cm^2, deci $RG = 12$ cm^2. $\mathcal{V} = 24\sqrt{2}\,\pi$ cm^3 sau $R \cdot RG = 24\sqrt{2}$ cm^3, deci $12R = 24\sqrt{2}$ cm, de unde obţinem $R = 2\sqrt{2}$ cm;

b) $RG = 12$ cm^2 sau $2\sqrt{2} \cdot G = 12$ cm, de unde rezultă că $G = 3\sqrt{2}$ cm;

c) $\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}(3\sqrt{2}+2\sqrt{2})$ cm^2 $= 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$ cm$^2 = 40\pi$ cm^2.

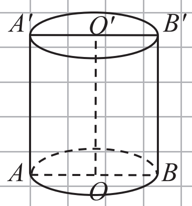
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 4$ cm şi $G = 7$ cm; b) $R = 6$ cm şi $G = 8$ cm.

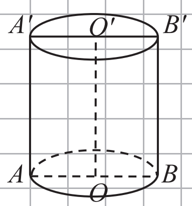
b)



2. Calculaţi R, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ şi $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, ştiind că:

a) $G = 5$ cm şi $\mathcal{A}_b = 16\pi$ cm^2; b) $G = 6$ cm şi $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm^2.

b)



Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Capitolele: Calcul algebric în $\mathbb{R}$, Funcţii, Elemente ale geometriei în spaţiu, Arii şi volume ale unor corpuri geometrice, Corpuri rotunde

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Se consideră funcţia $f : \{-2, 0, 3\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$. Valoarea funcţiei în punctul 0 este egală cu:
A. 0; B. –1; C. –3; D. 2.

(7p) **2.** Scriind sub forma cea mai simplă rezultatul calculului $\frac{x-1}{6x^4}:\frac{x-1}{3x^3}$, obţinem:
A. $\frac{1}{2x}$; B. $\frac{x-1}{3x}$; C. $\frac{4x}{x-1}$; D. $\frac{3x}{2}$.

(7p) **3.** Numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$ este egal cu:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

(7p) **4.** Graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$ intersectează axa Oy a sistemului de axe ortogonale xOy în punctul:
A. $M(0; 1)$; B. $N(0; 3)$; C. $P(1; 0)$; D. $Q(3; 0)$.

(7p) **5.** Aria laterală a cilindrului circular drept cu $R = 2$ cm şi $G = 5$ cm este egală cu:
A. 15π cm^2; B. 30π cm^2; C. 25π cm^2; D. 20π cm^2.

(7p) **6.** Volumul paralelipipedului dreptunghic cu $L = 3$ dm, $l = 1$ dm şi $h = 4$ dm este egal cu:
A. 14 dm^3; B. 16 dm^3; C. 12 dm^3; D. 18 dm^3.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

(8p) **1.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-2):\left(\frac{x+2}{6x}-\frac{3x+2}{2x-8}\cdot\frac{x^2-4x}{9x^2-4}\right)+1$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4\right\}$.

(8p) a) Arătaţi că $E(x) = 9x^2 - 6x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4\right\}$.

(8p) b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{E(x)} = 2$.

(8p) **3.** Calculaţi aria totală a trunchiului de con circular drept care are $R = 5$ cm, $r = 2$ cm şi $\mathcal{V} = 52$ cm^3.

4. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V, care are muchia bazei de $4\sqrt{3}$ cm şi înălţimea de $2\sqrt{6}$ cm.

(8p) a) Calculaţi aria laterală a piramidei.

(8p) b) Determinaţi $\sin[\sphericalangle(VB, (VAD))]$.

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Cardinalul mulţimii $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$ este egal cu:

A. 3; B. 6; C. 5; D. 4.

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-4; 3)$ este:

A. –3; B. 0; C. –4; D. 3.

(0,5p) **3.** Soluţia ecuaţiei $1 - x = 4$, $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:

A. –4; B. –5; C. –3; D. –6.

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $(x + x)^3 : (4x)$ este egal cu:

A. x^2; B. $2x^2$; C. $4x$; D. x^3.

(0,5p) **5.** Soluţia ecuaţiei $x^2 - 1 = 0$ în mulţimea numerelor reale este:

A. $\{0, 1\}$; B. $\{-1, 0\}$; C. $\{1, 2\}$; D. $\{-1, 1\}$.

(0,5p) **6.** Valoarea fracţiei algebrice $F(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ pentru $x = -2$ este egală cu:

A. –3; B. 4; C. 8; D. –1.

(0,5p) **7.** Volumul cilindrului circular drept cu $R = 2$ cm şi $G = 5$ cm este egal cu:

A. 20π cm^3; B. 25π cm^3; C. 30π cm^3; D. 35π cm^3.

(0,5p) **8.** Aria totală a unui tetraedru regulat cu muchia de 4 cm este egală cu:

A. $8\sqrt{2}$ cm^2; B. $4\sqrt{3}$ cm^2; C. $16\sqrt{3}$ cm^2; D. 16 cm^2.

(0,5p) **9.** Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, atunci măsura unghiului format de dreptele $A'B'$ şi BC este de:

A. 30°; B. 45°; C. 60°; D. 90°.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) **1.** Ştiind că $\sqrt{5} < 2{,}25$, determinaţi cel mai mare număr întreg care verifică inecuaţia $(\sqrt{5}x - 3)^2 + 1 > (\sqrt{5}x - 5\sqrt{2})(\sqrt{5}x + 5\sqrt{2})$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}x + 4$.

(0,7p) a) Calculaţi media aritmetică a numerelor $f(-\sqrt{2})$ şi $f(\sqrt{2})$.

(0,8p) b) Reprezentaţi grafic funcţia în sistemul de axe ortogonale xOy şi calculaţi distanţa de la punctul O la graficul funcţiei f.

3. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm şi înălţimea de 3 cm, iar $AC \cap BD = \{O\}$.

(0,7p) a) Calculaţi volumul piramidei $VABCD$.

(0,8p) b) Calculaţi distanţa de la punctul O la muchia VA.

(0,7p) c) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (VAC) şi (VDC).

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural de forma $\overline{4x4}$ divizibil cu 3 este:
a) 464; b) 474; c) 484; d) 494.

(5p) **2.** Se consideră mulţimile $E = \{a, b, c, d\}$ şi $F = \{d, p, t\}$. Cardinalul mulţimii $E \cup F$ este egal cu:
a) 4; b) 5; c) 6; d) 7.

(5p) **3.** Preţul unui abonament telefonic după o ieftinire cu 4% este de 48 lei. Preţul abonamentului telefonic înainte de ieftinire a fost de:
a) 50 lei; b) 52 lei; c) 60 lei; d) 72 lei.

(5p) **4.** Se consideră numărul $x = \sqrt{5^{11} - 5^{10}}$. Numărul x este egal cu:
a) $5^5\sqrt{2}$; b) $5 \cdot 2^8$; c) $2 \cdot 5^5$; d) $5^4\sqrt{5}$.

(5p) **5.** În tabelul următor sunt reprezentate numele şi anul naşterii pentru componenţii unei echipe de baschet.

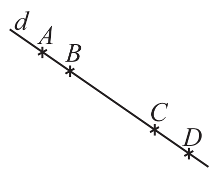
Numele	Alin	Eugen	Andrei	Dan	Cosmin
Anul naşterii	1997	1996	1998	1997	1998

Cel mai vârstnic component al echipei de baschet este:
a) Alin; b) Eugen; c) Andrei; d) Dan.

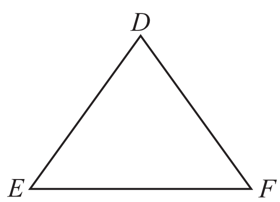
(5p) **6.** Ioana afirmă că „singurul număr natural de două cifre care este atât pătrat perfect cât şi cub perfect este 64”. Afirmaţia Ioanei este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** În figura alăturată, pe dreapta d sunt reprezentate punctele A, B, C şi D. Numărul segmentelor determinate de cele patru puncte este egal cu:
a) 3; b) 4;
c) 5; d) 6.

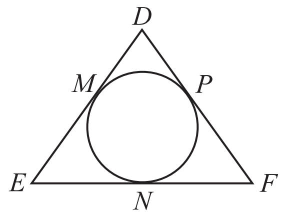


(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral DEF. Dacă semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 15 cm, atunci lungimea laturii EF este egală cu:
a) 5 cm; b) 10 cm;
c) 15 cm; d) 20 cm.



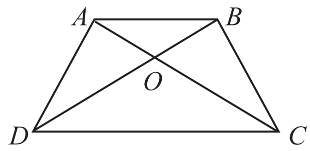
(5p) **3.** În figura alăturată, M, N şi P sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul DEF cu laturile acestuia. Dacă $DM = 3$ cm, $EN = 4$ cm şi $FP = 5$ cm, atunci lungimile laturilor DE, EF şi FD sunt egale cu:

a) 7 cm, 9 cm, 8 cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm;
c) 7 cm, 8 cm, 10 cm; d) 8 cm, 9 cm, 10 cm.



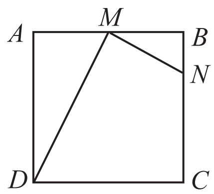
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{P}_{ABD} = 35$ cm şi $\mathcal{P}_{BCO} = 28$ cm, atunci lungimea bazei mici AB este egală cu:

a) 9 cm; b) 6 cm;
c) 8 cm; d) 7 cm.



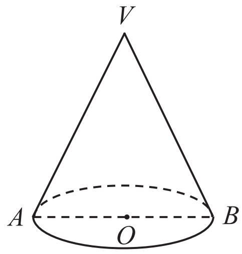
(5p) **5.** Pătratul $ABCD$ din figura alăturată reprezintă schematic o placă de gresie care s-a spart în trei bucăţi. Dacă latura pătratului este de 4 dm, $AM \equiv$ $\equiv MB$ şi $\sphericalangle DMN = 90°$, atunci aria patrulaterului $MNCD$ este egală cu:

a) 14 dm^2; b) 10 dm^2;
c) 11 dm^2; d) 12 dm^2.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept. Dacă secţiunea axială VAB a conului are perimetrul de 70 cm, iar raza şi generatoarea sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 5, atunci aria laterală a conului este egală cu:

a) 100π cm^2; b) 250π cm^2;
c) 200π cm^2; d) 125π cm^2.



Subiectul al III-lea. Scrieţi rezolvările complete.

1. Ştefan este fiul lui Ion. În urmă cu trei ani, vârsta lui Ion era de 7 ori mai mare decât vârsta lui Ştefan, iar peste un an vârsta lui Ştefan va fi de 4 ori mai mică decât vârsta lui Ion.

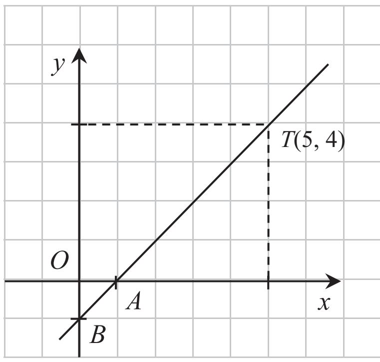
(3p) a) Calculează vârsta lui Ştefan şi vârsta lui Ion.

(2p) b) Peste câţi ani vârsta lui Ion va fi de 3 ori mai mare decât vârsta lui Ştefan?

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

(2p) a) Dacă A şi B sunt punctele de intersecţie a reprezentării grafice a funcţiei f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină măsurile unghiurilor triunghiului OAB.

(3p) b) Determină punctele situate pe graficul funcţiei f la distanţa $3\sqrt{2}$ u faţă de punctul $T(5; 4)$.

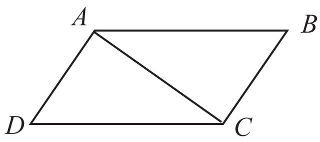


3. Se dă expresia $E(x)=\left(\dfrac{x+5}{2x-2}+\dfrac{3-x}{x^2-2x+1}\right)^4:\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^6$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(3p) a) Arată că $E(x)=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$, pentru orice număr real x, $x\neq-1$ şi $x\neq 1$.

(2p) b) Rezolvă în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{E(x)}=1$.

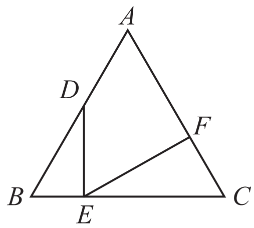
4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Se ştie că $AB=2BC$ şi $\sphericalangle DAB=2\cdot\sphericalangle ABC$.



(2p) a) Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$.

(3p) b) Determină raportul $\dfrac{\sphericalangle BAC}{\sphericalangle DAC}$.

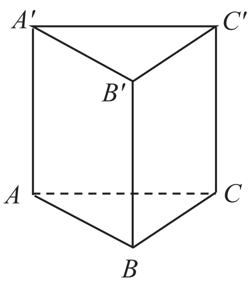
5. În figura alăturată, triunghiul echilateral ABC reprezintă schematic un panou solar, iar segmentele DE şi EF reprezintă două bare metalice care oferă rezistenţă panoului. Se ştie că $\mathcal{P}_{ABC}=24$ m, $DB=4$ m, $EC=6$ m şi că $\Delta DBE\sim\Delta ECF$.



(2p) a) Calculează aria triunghiului ADF.

(3p) b) Determină măsura unghiului DEF.

6. În figura alăturată este reprezentat schematic un panou publicitar în formă de prismă triunghiulară regulată, notată $ABCA'B'C'$. Se ştie că prisma are muchia bazei de $4\sqrt{3}$ m şi aria laterală egală cu $144\sqrt{2}$ m^2.



(2p) a) Calculează volumul prismei triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$.

(3p) b) Determină măsura unghiului dintre dreapta BC' şi planul $(A'AB)$.

Testul 2

Subiectul I. Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Scrierea numărului 400 ca produs de puteri de numere prime este:
a) $2^3\cdot 5^3$; b) $2^4\cdot 5^2$; c) $2^5\cdot 5^2$; d) $2^4\cdot 5^3$.

(5p) **2.** Dintre următoarele seturi de puteri, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $4^{16}, 8^{11}, 2^{30}$; b) $8^{11}, 2^{30}, 4^{16}$; c) $2^{30}, 4^{16}, 8^{11}$; d) $8^{11}, 4^{16}, 2^{30}$.

(5p) **3.** În anul 2020 o persoană a împlinit vârsta de 27 ani. Persoana respectivă va împlini 65 de ani în anul:
a) 2058; b) 2045; c) 2065; d) 2047.

(5p) **4.** Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2=1,(7)$, $x\in\mathbb{R}$, este:
a) $\left\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$; b) $\left\{-\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4}\right\}$; c) $\left\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right\}$; d) $\left\{-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right\}$.

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN ℝ

Lecţia 1. Adunarea şi scăderea fracţiilor algebrice

1. a) $\frac{6-2x}{5x^4}$; b) $\frac{3x+3}{7x^2}$; c) $\frac{4x-1}{2x^3}$; d) $\frac{8x-13}{4x^2}$. **2.** a) $8x$; b) $3x$; c) $2x$; d) $4x$. **3.** a) $\frac{10x+1}{4x}$; b) $\frac{4-16x}{9x}$; c) $-\frac{2x+25}{12x^2}$; d) $\frac{x+29}{15x^2}$. **4.** a) $\frac{14x-7}{8x}$; b) $\frac{5x-5}{9x}$; c) $\frac{7x+13}{18x^2}$; d) $\frac{17}{24x^2}$. **5.** a) $\frac{3-5x}{3x^2}$; b) $\frac{3x^2+2}{4x^4}$; c) $\frac{2x^2-15}{6x^5}$. **6.** a) $\frac{5-8x^2}{6x^3}$; b) $\frac{5x-14}{10x^3}$; c) $\frac{21x^3+10}{12x^5}$. **7.** a) $\frac{4-x}{x^2-2x}$; b) $\frac{3x+8}{12x^2-12x}$; c) $\frac{14-5x^2}{4x^3+2x^2}$. **8.** a) $\frac{2x+1}{8x^3+4x^2}$; b) $\frac{5x-1}{24x^3+8x^2}$; c) $\frac{3x-5}{18x^3-6x^2}$. **9.** a) $\frac{5}{x^3}$; b) $\frac{7}{x^3}$. **10.** a) $\frac{7x^2+10}{18x^2-12x}$; b) $\frac{3x^2-4}{24x^2-12x}$. **11.** a) $\frac{9}{x^3-6x^2+9x}$; b) $\frac{4}{x^3+4x^2+4x}$; c) $-\frac{1}{9x^3+6x^2+x}$; d) $\frac{1}{4x^3+4x^2+x}$. **12.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x+3}{x-3}$; c) $\frac{x}{x-5}$; d) $\frac{2x-1}{2x+1}$. **13.** a) $\frac{1}{x^2-3x}$; b) $\frac{4x+4}{x(x^2-4)}$. **14.** a) $E(x)=-\frac{x^3+15x+3}{4x^4-x^2}$; b) $E(x)=-\frac{x^3+9x+10}{4x^3-9x^5}$. **15.** a) $E(x)=$ $=\frac{2x^3+61x-3}{(x+3)(x-3)^2}$; b) $E(x)=\frac{-4x^3-43x+2}{(x-2)(x+2)^2}$. **16.** $E(x)=1$. **17.** $E(x)=\frac{2}{|x^2-1|}$, $n=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+$ $+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{10\cdot 12}=\frac{175}{132}=1{,}32(57)$; $n=1{,}3258$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) x; b) $\frac{x-1}{2x^2-6x}$. **2.** $\frac{4x}{4x^2-1}$. **3.** $E(x)=\frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

Lecţia 2. Înmulţirea fracţiilor algebrice

1. a) $\frac{16y^3}{25x^7}$; b) $\frac{21x}{8y^4}$; c) $\frac{10y^3}{21x^5}$; d) $\frac{20x^3}{27y^4}$. **2.** a) $\frac{x^2+x}{3y^2-3y}$; b) $\frac{2y^2-4y}{x^4-3x^3}$; c) $\frac{x^2+3x}{5y^2-20y}$; d) $\frac{5y-y^2}{6x^2-12x}$. **3.** a) $\frac{4x^5-8x^4+12x^3}{x-4}$; b) $\frac{-4x^5-4x^4+4x^3}{x+2}$; c) $\frac{20x^5+4x^4-8x^3}{x+3}$; d) $\frac{12x^5+4x^4-20x^3}{7-x}$. **4.** a) $\frac{x^2-1}{x^2-3}$; b) $\frac{x^3-1}{5+x}$; c) $\frac{x^3-2x^2+1}{x+8}$; d) $\frac{x^2-2x+1}{7-x^3}$. **5.** a) $\frac{x^2-9}{x^2-4}$; b) $\frac{x^2-16}{x^2-1}$; c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$; d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-12x+36}$. **6.** a) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-6}$; b) $\frac{x^2-2x-24}{x^2+x-20}$; c) $\frac{-x^2+x+30}{-x^2-5x+14}$; d) $\frac{-x^2-7x+18}{x^2+3x-40}$. **7.** a) $\frac{8x^2-6x+1}{15x^2+16x+4}$; b) $\frac{-48x^2+46x-5}{8x^2-6x-9}$;

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $D(\sqrt{6};\sqrt{6})$. **6.** d(A, G_g) = 6 u. **Testul 2. 5.** 60°. **6.** $a = \frac{1}{3}$. **Testul 3. 5.** $A(\sqrt{2};-3)$. **6.** $M_1(-3; -1)$, $M_2(1; 3)$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** F. **3.** A. **II. 1.** 4. **2.** $M(0; 3)$. **3.** 2. **III. 1.** B. 5 u. **2.** A. 1. **3.** D. $M(6; 5)$. **IV.** $(a-1)^2 + (a+b)^2 = 0$, deci $a = 1$ şi $b = -1$, prin urmare $g(x) = x - 1$. **V.** a) $G_f \cap Ox = \{A(2; 0)\}$ şi $G_f \cap Oy = \{B(0; -4)\}$; b) $M(1; -2)$, $N(-1; 2)$; $\mathcal{A}_{AON} = \mathcal{A}_{BON} = 2$ u^2.

Probleme din realitatea cotidiană

1. $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}^*, f(z) = z + 1$. **2.** $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{N}^*, f(t) = 2t$. **3.** $L = 3$ dm, $l = 2$ dm. **4.** 38 dam. **5.** $\mathcal{P} = 40$ m. **6.** $\mathcal{V} = 45$ dm^3. **7.** $\mathcal{V} = 0{,}16\pi$ m^3. **8.** 30 august. **9.** 48 exerciţii. **10.** 6,92. **11.** $\mathcal{A} = 1200$ m^2. **12.** 16 apartamente. **13.** 15 dam. **14.** 8 ani, 18 ani. **15.** 60 km/h. **16.** 192 dm^2. **17.** F. **18.** Se determină funcţia care are ca reprezentare grafică dreapta EF şi apoi se arată că $f(5) = 2$. **19.** $C(2; 2)$. **20.** $P(31; 42)$.

GEOMETRIE

Capitolul I – Elemente ale geometriei în spaţiu

Lecţia 1. Proiecţii de puncte, de segmente şi de drepte

1. B. $EF \perp \theta$. **2.** a) Proiecţia punctului A pe planul α este punctul B; b) Analog; c) Analog. **3.** A. $MN \not\perp \beta$. **4.** a) Proiecţia segmentului AB pe planul α este segmentul PQ; b) Analog; c) Analog. **5.** a) A; b) F; c) A. **6.** a) $\text{pr}_{(ABC)} A' = A$; b) $\text{pr}_{(ABC)} C' = C$; c) $\text{pr}_{(A'B'C')} B = B'$. **7.** a) $\text{pr}_{(A'AD)} B = A$; b) $\text{pr}_{(C'CD)} A = D$; c) $\text{pr}_{(A'AB)} C' = B'$; d) $\text{pr}_{(B'BC)} D' = C'$. **8.** a) F; b) A; c) A; d) A. **9.** a) A; b) A; c) A; d) A. **10.** a) $\text{pr}_{(A'B'C')} BC' = B'C'$; b) $\text{pr}_{(ABC)} D'B = DB$; c) $\text{pr}_{(A'AD)} A'C = A'D$; d) $\text{pr}_{(B'BC)} B'D = B'C$. **11.** a) $D'O'$; b) AO; c) $B'O$; d) AO'. **12.** a) $\{O\} = AC \cap BD$; $DO = 4$ cm; b) $VO = 3$ cm. **13.** a) $BO = 2\sqrt{3}$ cm, $O = \text{pr}_{(ABC)} A$; b) $AM = 3\sqrt{3}$ cm. **14.** a) $AD' = 12$ cm; b) $AC \cap BD = \{O\}$. $B'O = 6\sqrt{3}$ cm. **15.** a) Construim $MN \perp A'C'$, $N \in A'C'$, deci $\text{pr}_{(A'AC)} AM = AN$; $AN = 6$ cm; b) $AC \cap BD = \{O\}$. Construim $MP \perp B'D'$, $P \in B'D'$, aşadar $\text{pr}_{(B'BD)} CM = OP$; $OP = 6$ cm. **16.** Notăm cu G centrul de greutate al $\Delta A'BC'$ şi cu a lungimea muchiei $B'B$, iar $A'C' \cap B'D' = \{O\}$. Cum $A'O \equiv C'O$, rezultă că $G \in BO$. Observăm că $A'C' \perp (B'BG)$, deci $A'C' \perp B'D'$, prin urmare $A'B'C'D'$ este pătrat. Deoarece $\sphericalangle BB'O' = 90°$, avem $\frac{B'O'^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă că $B'O' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, deci $A'B' = a$, prin urmare $ABCDA'B'C'D'$ este cub. **17.** „$\Rightarrow$” Notăm cu O centrul bazei $ABCD$ şi cu O_1 centrul feţei laterale VBC. Deoarece $l = m$, rezultă că $OVBC$ este piramidă regulată, deci $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$. „$\Leftarrow$” Deoarece $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$, rezultă că $\Delta OO_1B \equiv \Delta OO_1V \equiv \Delta OO_1C$, deci $BO \equiv VO \equiv CO$, prin urmare $\Delta BOC \equiv \Delta VOC$, aşadar $l = m$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) D; b) B'; c) O, unde $\{O\} = AC \cap BD$. **2.** a) $P'Q'$; b) $N'P$; c) $Q'O$, unde $\{O\} = MP \cap NQ$. **3.** $AO \cap BC = \{O\}$; $VM = 2\sqrt{7}$ cm.

Cuprins