MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Anca Pascu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 10-a / coord.: Radu
Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Piteşti : Cartea Românească
Educațional, 2018
Index
ISBN 978-606-94581-9-8

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Adrian Boțan
Gabriel Popa
Gabriela Zanoschi
Gheorghe Iurea
Adrian Zanoschi
Dorel Luchian
Ciprian Baghiu

Teme Suplimente Gazeta Matematică

clasa a X-a

(2012 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

PREFAȚĂ

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan
Președintele Societății de Științe Matematice din România

Capitolul I
NUMERE REALE

Breviar teoretic

1. Parte întreagă. Parte fracționară

Partea întreagă a numărului real x este cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe x. Partea întreagă a numărului real x se notează cu $[x]$.

Partea fracționară a numărului real x este diferența dintre x și partea sa întreagă. Notăm partea fracționară a lui x cu $\{x\}$ și avem $x = [x] + \{x\}$.

Proprietăți:

a) $[x] \in \mathbb{Z}$; $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$[x] < [y] \Rightarrow x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$[x] = [y] \Rightarrow |x - y| < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$;

c) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

d) $[x + n] = [x] + n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$;

e) $[-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x], & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$; $\{-x\} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 1 - \{x\}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$;

f) $[x] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x]$ (Hermite).

2. Ecuația lui Pell

Fie $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, un număr natural care nu este pătrat perfect.

Ecuația $x^2 - dy^2 = 1$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$, se numește *ecuația lui Pell*.

Considerând (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$, soluția minimală (cu $x_0 \geq 2$ minim), care există!, soluțiile (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ ale ecuației Pell sunt date de relația:

$$x_n + \sqrt{d}\, y_n = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)\left(x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{d}\right) = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

la care adăugăm soluția $(1, 0)$.

3. Recurențe liniare omogene de ordinul doi

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir care verifică relația de recurență $a_{n+2} + a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, iar $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dacă r_1, r_2 sunt rădăcinile ecuației $r^2 + ar + b = 0$, avem:

1) dacă $r_1 \neq r_2$, atunci $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) dacă $r_1 = r_2$, atunci $a_n = r_1^n (c_1 n + c_2)$, $n \in \mathbb{N}$,

unde c_1, c_2 sunt constante care se determină din condițiile $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$.

4. Inegalități clasice

- *Inegalitatea mediilor*

Pentru orice $a_i > 0,\ i = \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

- *Cauchy–Buniakovsky–Schwarz* (CBS)

Pentru orice numere reale $a_i, b_i,\ i = \overline{1, n}$, avem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

- *H. Bergström*

Pentru orice $a_i > 0,\ b_i > 0,\ i = \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

- *Hölder*

Pentru orice $a_i > 0,\ b_i > 0,\ i = \overline{1, n}$, şi orice $p, q \in (0, \infty)$ pentru care $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avem:

$$\left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

- *Jensen*

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, o funcție convexă. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, avem:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

În cazul în care funcția f este concavă, inegalitatea îşi schimbă sensul.

- *Bernoulli*

Dacă $x \in (-1, \infty)$ şi $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, atunci $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (cu egalitate pentru $x = 0$).

Dacă $x \in (-1, \infty)$ şi $\alpha \in (0, 1)$, atunci $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (cu egalitate pentru $x = 0$).

- *Cebîşev*

Pentru orice două şiruri de numere reale (a_i), (b_i), $i = \overline{1, n}$, la fel ordonate, avem:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

În cazul în care cele două şiruri sunt invers ordonate, inegalitatea îşi schimbă sensul.

5. Extremele unei funcții de *n* variabile

Dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție care depinde de variabilele $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \ldots, x_n \in D_n$ ($D_i \subset \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}$), atunci:

1) $\max E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M$, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M$, $\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ şi există $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in$ $\in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, cu $E\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = M$;

2) $\min E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m$, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq m$, $\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ şi există $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in$ $\in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, cu $E\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = m$.

6. Polinoame cu coeficienți reali

Un *polinom* cu coeficienți reali f este o expresie de forma $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} +$ $+ \ldots + a_1 X + a_0$, unde $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sunt *coeficienții* polinomului ($a_n \neq 0$), X este *variabila*, iar $n \in \mathbb{N}$ se numeşte *gradul* polinomului.

Se numeşte *ecuație algebrică* o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde f este un polinom cu coeficienți reali. Spunem că numărul complex a este *rădăcină* a polinomului f (sau *soluție* a ecuației $f(x) = 0$) dacă $f(a) = 0$. Un polinom de grad n are exact n rădăcini complexe.

Câteva rezultate pe care le vom folosi:

a) Fie f un polinom cu coeficienți reali şi $a < b$ două numere reale astfel încât numerele $f(a)$ şi $f(b)$ să aibă semne diferite. Atunci, în intervalul (a, b) se află cel puțin o rădăcină reală a polinomului.

b) Dacă polinomul f are coeficienți întregi, $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$ şi admite rădăcina rațională $x_0 = \dfrac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$), atunci p divide termenul liber a_0 şi q divide coeficientul dominant a_n.

c) **Relațiile lui Viète**. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului:

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0,\ a_n \neq 0, \text{ atunci } \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

7. Densitate în $\mathbb{R}$

Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}$. Spunem că mulțimea A este *densă* în $\mathbb{R}$ dacă orice interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ conține cel puțin un element al lui A.

Teorema lui Kroneker. Dacă α este număr irațional, mulțimea $A = \{m + \alpha n \mid m, n \in$ $\in \mathbb{Z}\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

Consecință (**Jacobi**). Dacă α este număr irațional, mulțimea valorilor şirului $x_n = \{\alpha n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracționară) este densă în intervalul $(0, 1)$.

Enunţuri

1. Determinați numărul natural n pentru care:

$$a^n + b^n + c^n + (a + b + c)^n = (a + b)^n + (b + c)^n + (c + a)^n,$$

oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

Dan Negulescu (**S:L14.218**, SGM 9/2014)

2. Calculați suma $\sum_{1 \le i < j < k \le n} \frac{i+j}{k}$, unde $n \ge 3$ este un număr natural.

Sorin Dumitrică (**3**, SGM 4/2012)

3. Un ceas defect arată ora 12:00. Din acest moment, acul orar se deplasează cu $a°$ într-o oră, iar acul minutar cu $b°$ într-o oră, unde $a, b > 0$.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, demonstrați că există un număr natural nenul n astfel încât cele două ace ale ceasului să se suprapună exact după n ore.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, acele ceasului nu sunt suprapuse după n ore.

Steluța Monea (**S:L14.335**, SGM 12/2014)

4. Există numere iraționale $a, b > 0$, astfel încât a^b să fie număr rațional?

(**3**, SGM 2/2012)

5. Demonstrați că mulțimea numerelor iraționale x pentru care 2^x este pătrat perfect (număr natural) este infinită.

(**1**, SGM 5/2012)

6. Determinați mulțimea A a numerelor raționale neîntregi x pentru care 2^x este întreg.

(**2**, SGM 5/2012)

7. Fie m, n numere naturale nenule, astfel încât $\sqrt{3} > \frac{m}{n}$. Arătați că:

$$\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{n(m+1)}.$$

(**6**, SGM 5/2011)

8. Care sunt valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}$?

Dan Nedeianu (**S:L13.14**, SGM 1/2013)

9. Arătați că $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k(2k+1)}}{4k+1} < \frac{n}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Mariana Lazăr (**4**, SGM 4/2012)

10. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2}.$$

George-Florin Şerban (**S:L15.251**, SGM 10/2015)

11. Arătați că $\sum_{k=2}^{2015} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \right) > \frac{1007}{2 \cdot 2016^2}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea* (**S:L15.252**, SGM 10/2015)

12. Arătați că, pentru orice k natural astfel încât $1 \le k < n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, avem:

$$\sqrt{(n-k)\sqrt{(n-k+1)\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < n-k+1$$

şi deduceți că, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, este adevărată inegalitatea $\sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < 3$.

Concurs Rusia (**S:L13.20**, SGM 1/2013)

13. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$, cu cifre nenule, pentru care:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{\frac{1}{3}} - \overline{a_{n-1} \ldots a_0}^{\frac{1}{2}} = a_n .$$

(**7**, SGM 3/2012)

14. Fie $a = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$. Arătați că a este un număr irațional cuprins între 2 şi 3.

Alin Muşat (**S:L15.260**, SGM 10/2015)

15. Dacă a, $b \in (1, \infty)$, cu $a > b$, iar m, $n \in \mathbb{N}$, cu $2 \le m < n$, comparați numerele $\sqrt[m]{a^n}$ şi $\sqrt[n]{b^m}$.

Mihai Dicu (**S:L14.52**, SGM 2/2014)

16. Comparați $\sqrt[2015]{2015!}$ cu $\sqrt[2016]{2016!}$.

Anca-Valentina Moldoveanu (**S:L16.97**, SGM 3/2016)

17. Considerăm numerele naturale nenule m şi n, şi numărul real strict pozitiv x. Arătați că $(x^n + 1)^n = (x^m - 1)^m$ dacă şi numai dacă $x^m = x^n + 1$.

George Stoica (**S:L15.132**, SGM 4/2015)

18. Arătați că, pentru orice $a \in [0, 1]$, există o mulțime de numere naturale A_a cu proprietatea: există $n_a \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru $n \ge n_a$, avem:

$$(a - 0{,}0001)n \le \operatorname{card}(A_a \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\}) \le (a + 0{,}0001)n.$$

Radu Gologan (**S:L15.292**, SGM 11/2015)

19. Fie $A_k = \left\{\sqrt[k]{n+1} + \sqrt[k]{8n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. Arătați că:

a) A_2 conține o infinitate de numere iraționale;

b) $A_3 \cap \mathbb{Q} = \{2\}$;

c) $A_2 \cap \mathbb{Q}$ este o mulțime infinită.

Dan Negulescu şi *Ionel Tudor* (**S:L13.334**, SGM 12/2013)

20. Care este cea mai apropiată fracție $\frac{p}{q}$ de $\sqrt{3}$, unde p, q sunt două numere naturale nenule, relativ prime, mai mici decât 150?

(**9**, SGM 5/2012)

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x - 2\sqrt{x-2} + \left[x - \frac{2010}{671}\right]^2 = 1$;

b) $\left[\left\{\frac{x-2}{3}\right\} - \frac{x-2}{3}\right] = \frac{1-3x}{5}$.

Emilian Runceanu (**S:L14.211**, SGM 9/2014)

Capitolul II
FUNCŢII

Breviar teoretic

1. Funcții injective

Spunem că funcția $f : A \to B$ este *injectivă* dacă orice două elemente diferite din domeniu au imagini diferite.

$$f \text{ injectivă } \Leftrightarrow [\forall\, x_1 \neq x_2,\, x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\forall\, x_1, x_2 \in A \text{ astfel încât } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Orice funcție $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, care este strict monotonă, este injectivă. Reciproca nu este adevărată.

Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcții. Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă. Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

2. Funcții surjective

Fie $f : A \to B$ o funcție. *Imaginea* funcției f este submulțimea lui B

$$f(A) = \operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}.$$

Spunem că funcția f este *surjectivă* dacă $\operatorname{Im} f = B$.

Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcții. Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă. Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

3. Funcții bijective/inversabile

Spunem că funcția $f : A \to B$ este *bijectivă* dacă ea este atât injectivă, cât şi surjectivă.

Spunem că funcția $f : A \to B$ este *inversabilă* dacă există o funcție $f^{-1} : B \to A$ (numită *inversă* a funcției f), astfel încât $f \circ f^{-1} = 1_B$ şi $f^{-1} \circ f = 1_A$. Inversa f^{-1}, dacă există, este unică.

Funcția $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă, oricare ar fi $y \in B$, există şi este unic $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Astfel, putem defini funcția $g : B \to A$ prin $g(y) = x \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x) = y$ şi se arată că $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f = 1_A$, deci $g = f^{-1}$. Ținând cont şi de ultimele afirmații de la **1** şi **2**, putem afirma că o funcție f este bijectivă dacă şi numai dacă este inversabilă.

Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$, graficele funcțiilor f şi f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare. Dacă G_f şi $G_{f^{-1}}$ au puncte comune, acestea se vor afla pe prima bisectoare:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x,\ x \in A.$$

4. Fie A, B mulțimi nevide finite cu $|A| = m$, $|B| = n$ şi $f : A \to B$ o funcție.

Dacă f este injectivă, atunci $m \leq n$. Dacă f este surjectivă, atunci $m \geq n$. Dacă f este bijectivă, atunci $m = n$.

Dacă $m = n$, atunci f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

5. Fie A, B două mulțimi nevide finite cu $|A| = m$ şi $|B| = n$. Numărul funcțiilor $f : A \to B$ este n^m.

Dacă $m \leq n$, numărul funcțiilor injective $f : A \to B$ este $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Dacă $m \geq n$, numărul funcțiilor surjective $f : A \to B$ este:

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Dacă $m = n$, numărul funcțiilor bijective $f : A \to B$ este $n!$.

6. Rezolvarea grafică a ecuațiilor

Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție numerică.

Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt abscisele eventualelor puncte de intersecție dintre G_f şi axa Ox.

Soluțiile ecuației $f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$, sunt abscisele eventualelor puncte de intersecție dintre G_f şi dreapta orizontală $y = a$. Ecuația are soluție dacă şi numai dacă $a \in \operatorname{Im} f$. Dacă f este injectivă (în particular, dacă f este strict monotonă), ecuația are cel mult o soluție.

Fie $g : D \to \mathbb{R}$ o a doua funcție. Soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$ sunt eventualele puncte de intersecție dintre graficele celor două funcții. Dacă funcțiile f şi g sunt monotone, de monotonii diferite, măcar una dintre ele fiind strict monotonă, ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție. Dacă funcția f este convexă şi g este concavă, măcar una dintre ele fiind strict convexa/concavă, ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții.

Enunţuri

1. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, f(x) = 2013x - 1,\ g(x) = \left[\dfrac{x+1}{2013}\right]$.

a) Arătați că $g(f(x)) = x$.

b) Există $\alpha \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(g(\alpha)) \neq \alpha$?

Manuela Diaconescu (**S:L13.331**, SGM 12/2013)

2. a) Determinați imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x] + [-x]$.

b) Fiind date numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ cu proprietatea $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2009}) = -2008$, câte dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ sunt întregi?

Mihai Monea şi *Marian Stroe* (**7**, SGM 12/2011)

3. Definiți o funcție $f : [0, 1] \to [0, 1]$ pentru care lungimea graficului să fie exact 2011.

(**9**, SGM 12/2011)

4. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface, pentru orice număr real, relația $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$. Ce valori poate lua $f\left(-\sqrt{2}\right)$?

Olimpiadă R. Moldova (**9**, SGM 9/2012)

5. Calculați $f(2009)$ pentru funcția $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}^*$ cu proprietățile:

i) $f(2) = 2$;
ii) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, pentru orice m, n numere întregi impare;
iii) $f(3m + 4n) = 3f(m) + 4f(n)$, pentru orice numere întregi m, n.

Lucian Dragomir (**6**, SGM 12/2011)

6. Numerele reale a, b, c, d sunt în progresie aritmetică. Care este valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$?

Rică Zamfir (**2**, SGM 11/2012)

7. Fie funcția $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3}{4}x + 2 + \sqrt{16 - x^2}$. Determinați imaginea funcției f.

Dorin Barta (**S:L16.132**, SGM 4/2016)

8. Considerăm $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{2014}(x) = x^{2014}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\}$.

a) Dați exemplu de o funcție $f \in F$ cu proprietatea că există un interval $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(I)$ nu este interval.

b) Determinați funcțiile $f \in F$ cu proprietatea că imaginea $f(I)$ a oricărui interval $I \subset \mathbb{R}$ prin funcția f este tot un interval.

Ştefan Alexe (**S:L14.252**, SGM 10/2014)

9. Fie $a, b > 0$. Arătați că nu există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax + b)$, $h(x) = f(bx + a)$ să fie strict monotone, de monotonii diferite.

Marius Perianu (**S:L15.336**, SGM 12/2015)

10. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, cu $n > 1$ număr natural şi $m < n$ dat. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o funcție din mulțimea funcțiilor $f : A \to A$, imaginea acesteia să conțină exact m elemente, din care cel puțin unul par?

Petru Tudor (**S:L14.134**, SGM 4/2014)

11. Fie n un număr natural, $n \geq 3$ şi $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Care este numărul funcțiilor $f : A_n \to A_n$ care satisfac relația $f \circ f = f$?

Leonard Giugiuc (**S:L13.51**, SGM 2/2013)

12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Arătați că f nu este injectivă şi nici surjectivă.

b) Calculați $f\left(\dfrac{1}{2015}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{2014}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \dfrac{1}{f(2)} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{f(2015)}$.

Ovidiu Bădescu (**S:L14.340**, SGM 12/2014)

13. Fie $f : \mathbb{R} \to (1, \infty)$ care verifică simultan condițiile:

a) $f(3x-2) \leq 5^{3x} + 1$; b) $f(7x+2) \geq 5^{7x+4} + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

1) Arătați că $f(x) = 5^{x+2} + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Arătați că f este bijectivă.

Carmen Botea şi *Viorel Botea* (**S:L15.258**, SGM 10/2015)

14. Construiți o funcție bijectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să fie strict monotonă pe fiecare interval de tipul $(n, n+1)$, cu n număr întreg şi nemonotonă pe $\mathbb{R}$.

(**10**, SGM 10/2011)

15. Determinați funcțiile surjective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$\frac{1}{2f(1)} + \frac{1}{3f(2)} + \ldots + \frac{1}{nf(n-1)} = \frac{n-1}{f(n)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Nicolae Stăniloiu (**S:L14.336**, SGM 12/2014)

16. Arătați că funcția $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că $\sqrt{f(x)} + f(x) = \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, este bijectivă.

Nicolae Muşuroia (**2**, SGM 3/2012)

17. Există funcții bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică $f(x) \cdot f([x]) \leq f(\{x\}) \cdot f(1 - \{x\})$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$?

(**S:L13.131**, SGM 4/2013)

18. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții astfel încât $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x - f(x)$ este bijectivă, atunci există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x_0) = x_0$.

Marius Perianu (**S:L15.340**, SGM 12/2015)

19. Considerăm $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f_a : [0, 1] \to [1, 2]$, $f(x) = \dfrac{x + a}{x^2 + x + 1}$ este corect definită. Demonstrați că există un unic $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că f este inversabilă. Determinați această funcție inversă.

Cătălin Năchilă și *Petre Năchilă* (**S:L13.294**, SGM 11/2013, enunț corectat)

20. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3[2x] + 2[3x]$.

a) Care sunt punctele fixe ale funcției f?

b) Este funcția f bijectivă?

c) În caz afirmativ, aflați numerele $m, n \in \mathbb{Z}$, știind că $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x + m[2x] + n[3x]$.

Marius Burtea (**S:L15.99**, SGM 3/2015)

21. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$\sqrt[3]{2014 + f(2^x)} + \sqrt[3]{2015 + f(x^2)} = \sqrt[3]{2016 - f(2^x)} + \sqrt[3]{2017 - f(x^2)},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Studiați injectivitatea funcției f.

Niculae Cavachi (**S:L16.100**, SGM 3/2016)

22. Arătați că funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(n) = \dfrac{n}{\sqrt[3]{2n+1} + \sqrt[3]{2n-1}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este injectivă.

Eugen Radu (**S:L16.12**, SGM 1/2016)

23. Arătați că funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definită pentru $n \in \mathbb{N}^*$ prin:

$$f(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

nu este injectivă, dar este surjectivă.

Ovidiu Pop (**S:L16.138**, SGM 4/2016)

24. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care verifică relația $x^2 + 2f(xy) + y^2 = f^2(x + y)$ pentru orice x, y numere naturale.

Ovidiu Stăniloiu (**S:L14.333**, SGM 12/2014)

25. Fie $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x^4) + f^2(x^2) = 2x^4 + 4x^2 + ax + 6,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dacă și numai dacă $a = 0$.

Meda Bujor (**S:L15.220**, SGM 9/2015)

26. Fie o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = \dfrac{1}{2}$ și $f(x + y) = f(x)\,f(-y) + f(y)\,f(-x)$ pentru orice numerele reale x, y. Deduceți că f este funcție constantă.

(**8**, SGM 5/2011)

27. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională:

$$f(x^3 + x - 2 + y) = f(x^3 + x - 2) + f(y^3),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Sorin Ulmeanu (**S:L14.254**, SGM 10/2014)

28. Determinați funcțiile $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$ care verifică relațiile $|f(x) - f(y)| \le \left|\lg \frac{x}{y}\right|$, $f(1) = 0$ și $f(0) = 1$.

Florin Rotaru (**S:L13.291**, SGM 11/2013)

29. Determinați funcțiile injective $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ care verifică relația:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f\left(x\sqrt{y}\right)},\text{ pentru orice } x, y \in (0, \infty).$$

Petru Todor (**S:L15.298**, SGM 11/2015)

30. Fie A o mulțime finită de numere reale strict pozitive. Determinați funcțiile $f : A \to A$ care îndeplinesc condiția $(f \circ f)(x) = 2f(x) - x$, $\forall\, x \in A$.

Florian Dumitrel (**S:L15.333**, SGM 12/2015)

31. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru care:

$$f\left(m^2 - mf(n) + \left(f(n)\right)^2\right) = \frac{m^3 + f(n^3)}{m + n},$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m + n \ne 0$.

(**S:L15.138**, SGM 4/2015)

32. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisfac condițiile:

1) $f(2) = 2$; 2) $f(n) \le f(n + 1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; 3) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu și *Neculai Stanciu* (**S:L15.139**, SGM 4/2015)

33. Există funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x)) = x^2$ și $g(f(x)) = x^3$ pentru orice număr real x?

(**5**, SGM 1/2012)

34. Arătați că există două funcții $f, g : (1, \infty) \to (1, \infty)$ astfel încât $f(g(x)) = x^2$ și $g(f(x)) = x^4$ pentru orice număr real $x > 1$.

(**6**, SGM 1/2012)

35. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietățile:

a) $f(x + 1) = f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = b$, oricare ar fi $x \in [a, a + 1)$.

Florian Dumitrel (**S:L15.337**, SGM 12/2015)

36. Determinați funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care satisface relația:

$$f(y + f(f(x))) + f(f(y + 1)) + x = 0,\text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Gheorghe Andrei (**S:L16.180**, SGM 5/2016)

37. Arătați că nu există o funcție bijectivă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, astfel încât relația:

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$$

să aibă loc pentru orice numere naturale m, n.

(**4**, SGM 6/2011)

Capitolul III
EXPONENŢIALE ŞI LOGARITMI

Breviar teoretic

1. Logaritmul unui număr real pozitiv

Fie a > 0, $a \neq 1$ un număr real fixat şi b un număr real pozitiv. Ecuația $a^x = b$ are o unică soluție reală x, care se notează $\log_a b$:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,\ a, b > 0,\ a \neq 1.$$

Proprietăți:

a) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$, $\forall\ A, B \in (0, \infty)$;

b) $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$, $\forall\ A, B \in (0, \infty)$;

c) $\log_a A^n = n \log_a A$, $\forall\ A \in (0, \infty)$, $\forall\ n \in \mathbb{R}$;

d) $\log_{a^n} A = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a A$, $\forall\ A \in (0, \infty)$, $\forall\ n \in \mathbb{R}^*$;

e) $\log_a A = \dfrac{1}{\log_A a}$, $\forall\ A \in (0, \infty) \setminus \{1\}$;

f) $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$, $\forall\ A, b \in (0, \infty)$, $b \neq 1$;

g) $\log_a 1 = 0$; $\log_a b > 0 \Leftrightarrow a, b \in (0, 1)$ sau $a, b \in (1, \infty)$.

2. Funcțiile exponențială/logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real fixat. Funcțiile exponențială/logaritmică se definesc prin $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, respectiv $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$. Deoarece

$$a^{\log_a x} = x,\ \forall\ x \in (0, \infty);\ \log_a a^x = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

rezultă că $f \circ g = 1_{(0, \infty)}$ şi $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$, prin urmare cele două funcții sunt inversabile (deci bijective), fiecare fiind inversa celeilalte.

Ambele funcții sunt strict monotone, şi anume: f şi g sunt strict crescătoare dacă $a \in (1, \infty)$ şi strict descrescătoare dacă $a \in (0, 1)$.

Enunţuri

1. Arătați că $\dfrac{1}{\ln(10e)+\ln^2 10}+\dfrac{1}{\lg(10e)+\lg^2 e}+\dfrac{1}{1+\ln 10+\lg e}=1$.

Traian Tămîian (**S:L14.97**, SGM 3/2014)

2. Calculați $2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3}$.

(**1**, SGM 6/2011)

3. Pentru $a, b \in \mathbb{Q}$, cu $a + b \neq 0$, considerăm numerele:

$$x=\frac{a\log_2 2013+b\log_2 2014}{a+b} \text{ şi } y=\frac{a\sqrt[3]{2013}+b\sqrt[3]{2014}}{a+b}.$$

a) Arătați că x şi y sunt numere iraționale.

b) Calculați $[x]$ şi $[y]$ dacă, în plus, $a, b \geq 0$.

Dan Negulescu (**S:L14.220**, SGM 9/2014)

4. Există valori reale x pentru care numerele $\log_2(x-5)$, $\log_2(x+7)$, $\log_2(7x+1)$ să fie în progresie aritmetică?

Ioan Bogdan (**S:L13.52**, SGM 2/2013)

5. Arătați că şirul $\log_2 3$, $\log_2 4$, …, $\log_2 n$ … conține o infinitate de triplete în progresie aritmetică.

(**5**, SGM 11/2012)

6. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

a) Are ecuația $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a(x-y)$ o infinitate de soluții?

b) Aceeaşi întrebare pentru ecuația $\log_a \dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Dana Heuberger (**4**, SGM 3/2012)

7. Câte zecimale exacte trebuie cunoscute pentru numărul $\log_{10} 2$ pentru a determina numărul de cifre ale numărului 2^{100}?

(**3**, SGM 6/2011)

8. Arătați că numărul 5^{2016} are 1410 cifre, prima cifră fiind 1.

Eugen Radu (**S:L16.11**, SGM 1/2016)

9. Determinați toate numerele naturale n cu proprietatea $\dfrac{7n-12}{2^n}+\dfrac{2n-14}{3^n}+\dfrac{24n}{6^n}=1$.

(**S:L15.259**, SGM 10/2015)

10. Care sunt numerele naturale n pentru care $2^{n-2}=\log_2^2 n$?

Ludovic Longaver (**1**, SGM 3/2012)

11. Determinați numerele naturale $n \geq 1$ pentru care $n = \log_2(1+n)+\log_3 n$.

Lucian Dragomir (**S:L13.176**, SGM 5/2013)

12. Dacă $a \in (1, \infty)$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive care verifică condițiile:

$$\sum_{i=1}^{n}\log_a x_i<0,\quad \prod_{i=1}^{n}\log_a x_i>0,$$

atunci cel puțin două dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt subunitare.

Alexandra Dragomir (**2**, SGM 12/2012)

13. Arătați că $\sqrt{3}-\frac{15}{16}+\log_2 3>\sqrt[3]{3}+\frac{1}{81}$.

Viorica Frecuş (**S:L16.92**, SGM 3/2016)

14. Arătați că $\lg 2^2>\lg 5\cdot\lg\frac{4}{3}$.

Ion Nedelcu (**S:L16.20**, SGM 1/2016)

15. Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare: $a=\log_9 6$ sau $b=\log_{12} 8$?

Ovidiu Bădescu (**S:L14.332**, SGM 12/2014)

16. Care număr este mai mare: $\log_2 3$ sau $\log_3 4$? Comparați numerele $\log_n(n+1)$ şi $\log_{n+1}(n+2)$ pentru n număr natural mai mare sau egal cu 2.

(**2**, SGM 5/2011)

17. Care dintre următoarele numere este mai mare: $\log_2 9$ sau $\log_3 28$?

(**10**, SGM 6/2011)

18. Care număr este mai mare: $\frac{4}{\pi}+\sqrt{2}$ sau $2\cdot 2^{\frac{1}{4}}+\log_2 1{,}18$?

(**3**, SGM 4/2011)

19. Demonstrați că $\sqrt[n-2]{\log_3(n+1)}<\frac{3}{2}$, oricare ar fi numărul natural $n\geq 4$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea* (**S:L14.219**, SGM 9/2014)

20. Arătați că $\log_2(n!)<\log_2\left(\sqrt[3]{n}\right)^n+2\log_2\sqrt[3]{(n+1)^n}-\frac{2n}{3}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Mihai Popa (**6**, SGM 12/2012)

21. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_1=1$ şi $3^{a_1}+2\cdot 3^{a_2}+\ldots+n\cdot 3^{a_n}=3^{a_{n+1}}$ pentru $n\geq 1$. Arătați că $a_n\geq n\log_3 n-n+1$.

(**8**, SGM 3/2012)

22. Considerăm numerele reale $a\geq b>1$. Aflați valoarea maximă a sumei:

$$\log_a\frac{a}{b}+\log_b\frac{b}{a}.$$

Olimpiadă Filipine (**S:L14.95**, SGM 3/2014)

23. Dacă $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$, aflați valoarea minimă a diferenței $|x|-|y|$.

(**S:L15.57**, SGM 2/2015)

24. Ştiind că a, $b\in(0,1)$ verifică relația $\lg^3 a+\lg^3 b=\frac{3(\lg a+\lg b)+2}{4}$, determinați valoarea maximă a produsului $P=ab$.

Mihaela Berindeanu (**S:L16.57**, SGM 2/2016)

25. Arătați că $2^x>x$, pentru orice număr real x.

(**S:L15.254**, SGM 10/2015)

26. Arătați că $a^{\sqrt{\log_a b}}+b^{\sqrt{\log_b a}}\leq a+b$ pentru orice numere a, $b>1$.

Florin Nicolaescu (**9**, SGM 12/2012)

27. Arătați că, pentru orice numere reale a, b şi c astfel încât $ab+bc+ca>0$, au loc inegalitățile $\ln(ab+bc+ac)+\ln 3\leq\ln(a+b+c)^2\leq\ln(a^2+b^2+c^2)+\ln 3$.

Monica Cioancă (**S:L15.175**, SGM 5/2015)

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

Capitolul I. NUMERE REALE

1. (S:L14.218) Relația trebuie să se verifice şi pentru $a = b = c = 1$, deci $3 + 3^n = 3 \cdot 2^n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3^{n-1} = 2^n - 1$. Cum, pentru $n \geq 3$, $3^{n-1} > 2^n - 1$, singurele soluții pot fi $n = 1$ şi $n = 2$. Se verifică faptul că $n = 1$ şi $n = 2$ sunt soluții.

2. (3, SGM 4/2012) Pentru $n \geq 3$, $S_n = \sum\limits_{i \leq i < j < k \leq n} \frac{i+j}{k} = \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{a_k}{k}$, unde $a_k = [1 + 2 + 1 + 3 + \ldots + 1 + (k-1)] + [2 + 3 + 2 + 4 + \ldots + 2 + (k-1)] + \ldots + [(k-2) + (k-1)] =$ $= (k-2)[1 + 2 + \ldots + (k-1)] = (k-2) \cdot \frac{(k-1)k}{2}$.

Prin urmare, $S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{(k-2)(k-1)}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k-2)(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} (k^2 - 3k + 2) =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

3. (S:L14.335) După n ore, acul orar parcurge $na°$, iar acul minutar parcurge $nb°$.

a) Cele două ace se suprapun dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $|na - nb| = 360k$, deci $n|a - b| = 360k$. Deoarece $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $|a - b| = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Putem considera $k = p$ şi $n = 360q$.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a - b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci nu există $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, cu proprietatea $n|a - b| = 360k$ şi, de aici, concluzia problemei.

4. (3, SGM 2/2012) Răspunsul este afirmativ. De exemplu, $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3 \in \mathbb{Q}$.

5. (1, SGM 5/2012) Pentru $x = \log_2 p^2$, p număr prim, $p \geq 3$, avem că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iar $2^x = p^2$ şi, cum mulțimea numerelor prime este infinită, rezultă concluzia.

6. (2, SGM 5/2012) Fie $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $2^x \in \mathbb{Z}$. Evident că $x > 0$, deci putem considera $m, n \in \mathbb{N}^*$. Avem $2^x = p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2^m = p^n$, deci $p = 2^a$, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow m = na \Rightarrow \frac{m}{n} = a \in \mathbb{N}$, contradicție. În concluzie, $A = \varnothing$.

7. (6, SGM 5/2011) Deoarece $\sqrt{3} > \frac{m}{n}$, deducem că $3n^2 - m^2 > 0$. Cum $m, n \in \mathbb{N}$, rezultă că $3n^2 - m^2 \geq 1$. Deoarece ecuația $3n^2 - m^2 = 1$ nu are soluții numere naturale, deducem că $3n^2 - m^2 \geq 2$. Astfel, $\sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{m^2+2}}{n}$, prin urmare $\sqrt{3} - \frac{m}{n} \geq \frac{\sqrt{m^2+2} - m}{n}$.

Observând că $\sqrt{m^2 - 2} - m > \frac{1}{m+1}$, rezultă concluzia problemei.

8. (S:L13.14) Evident, inegalitatea nu are loc pentru $n = 0$ şi $n = 1$. Avem:

$n = 2 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} > 1 + 1 + 1 > 2$;

$n = 3 \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3} > 1 + 1 + 1 = 3$;

$n = 4 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 2 + 1 + 1 = 4$;

$n = 5 \Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{5} > 2{,}2 + 1{,}5 + 1{,}3 = 5$;

$n = 6 \Rightarrow \sqrt{6} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{6} < 2{,}5 + 1{,}9 + 1{,}6 = 6$;

$n = 7 \Rightarrow \sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 3 + 2 + 2 = 7$;

$n = 8 \Rightarrow \sqrt{8} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{8} < 3 + 2 + 2 < 8$.

Pentru $n \geq 9$, $\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} < \frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = n$.

În concluzie, valorile căutate sunt numerele naturale $n \geq 6$.

9. (4, SGM 4/2012) Deoarece $\sqrt{2k(2k+1)} < \frac{4k+1}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, suma dată este mai mică decât $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

10. (S:L15.251) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n^2(n+1)^2} < \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$. Prin urmare, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\sqrt{k(k+1)}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2}$.

11. (S:L15.252) Din inegalitatea mediilor, pentru $k \geq 2$, avem:

$$\sqrt[2k]{(2k)!} < \frac{1+2+...+(2k)}{2k} = \frac{2k+1}{2}, \text{ deci}$$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{4}{(2k+1)^2} > \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Prin urmare, $\sum_{k=2}^{2015} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \sum_{k=2}^{2015} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2017} = \frac{2014}{3 \cdot 2017} > \frac{1007}{2 \cdot 2016^2}$.

12. (S:L13.20) Demonstrăm prin inducție după k. Pentru $k = 1$ trebuie să arătăm că $\sqrt{(n-1)\sqrt{n}} < n$ pentru $n > 1$, adică $(n-1)\sqrt{n} < n^2 \Leftrightarrow (n-1)^2 < n^3$, evident adevărat pentru $n \geq 2$. Presupunem că $\sqrt{(n-p)\sqrt{(n-p+1)...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < n - p + 1$ şi demonstrăm că $\sqrt{(n-p-1)\sqrt{(n-p)...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < n - p$. Avem:

$\sqrt{(n-p-1)\sqrt{(n-p)...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < \sqrt{(n-p-1)(n-p+1)} = \sqrt{(n-p)^2 - 1} <$

$< \sqrt{(n-p)^2} = n - p$. Prin urmare, relația dată este adevărată pentru orice k, $1 \leq k < n$. Alegând $k = n - 2$, $n \geq 3$, obținem a doua cerință a problemei.