MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Bianca Vişan
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 11-a / coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Piteşti : Cartea Românească Educațional, 2018
Index
ISBN 978-606-8982-00-7

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Florin Bojor
Dana Heuberger
Gheorghe Boroica
Nicolae Mușuroia

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a XI-a

(2011 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Prefață 6

Capitolul I. ALGEBRĂ 7
Capitolul II. ŞIRURI 24
Capitolul III. LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE 40
Capitolul IV. FUNCȚII DERIVABILE 47

INDICAȚII ŞI SOLUȚII
Capitolul I. ALGEBRĂ 52
Capitolul II. ŞIRURI 93
Capitolul III. LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE 129
Capitolul IV. FUNCȚII DERIVABILE 143

Bibliografie 155

Autorii soluțiilor 156

INDEX 157

PREFAŢĂ

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins că problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan
Președintele Societății de Științe Matematice din România

Capitolul I
ALGEBRĂ

În cele ce urmează vom trece în revistă câteva noțiuni şi proprietăți care sunt mai puțin prezente în manualele şcolare, dar care sunt foarte folositoare pentru soluționarea unor probleme de concurs. Pentru detalii şi demonstrații se poate consulta lucrarea [4].

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.1. Definiție. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ se numeşte **valoare proprie** a matricei A, dacă există un vector nenul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (o matrice coloană) astfel încât $AX = \lambda X$.

Un astfel de vector X se numeşte **vector propriu** al matricei A corespunzător valorii proprii λ.

1.2. Observații:

1) O relație de forma $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, se numeşte relație de tip valoare proprie – vector propriu.

2) Dacă X_1, X_2 sunt doi vectori proprii ai lui A corespunzători aceleiaşi valori proprii λ, atunci pentru orice $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, vectorul $X = a_1X_1 + a_2X_2$ este un vector propriu al lui A.

3) Mulțimea tuturor valorilor proprii ale matricei A se numeşte **spectrul matricei** A şi se notează cu $Spec(A)$.

1.3. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a lui A, iar $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ este un vector propriu corespunzător, atunci:

a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, numărul λ^k este o valoare proprie a matricei A^k, iar X este un vector propriu al lui A^k.

b) Pentru orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ numărul $f(\lambda)$ este o valoare proprie a matricei $f(A)$, iar X este un vector propriu al lui $f(A)$.

c) Dacă A este inversabilă, atunci $\lambda \neq 0$ (o matrice inversabilă nu are valoarea proprie 0) şi numărul $\frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie a matricei A^{-1}, iar X este un vector propriu al lui A^{-1}.

1.4. Observații.

a) Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, singurele valori proprii ale matricei A^k sunt de forma λ^k, unde λ este o valoare proprie a lui A.

b) Singurele valori proprii ale matricei inverse A^{-1} sunt de forma $\frac{1}{\lambda}$, unde λ este o valoare proprie a lui A.

c) Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, atunci singurele valori proprii ale matricei $f(A)$ sunt de forma $f(\lambda)$, unde λ este o valoare proprie a lui A.

d) În general, mulțimea vectorilor proprii ai matricei A^k sau ai lui $f(A)$ **include strict** mulțimea vectorilor proprii ai matricei A.

1.5. Teoremă. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dacă şi numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

1.6. Definiție. Matricea $(A - \lambda I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se numeşte **matricea caracteristică** a matricei *A*.
Polinomul $p_A \in \mathbb{C}[X]$, $p_A = \det(A - X \cdot I_n)$ se numeşte **polinomul caracteristic** al matricei *A*.
Ecuația polinomială $p_A(x) = 0$ se numeşte **ecuația caracteristică** a matricei *A*.

1.7. Teorema Cayley–Hamilton. $p_A(A) = O_n$, adică orice matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o rădăcină a polinomului său caracteristic.

1.8. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci

$$p_A = (-1)^n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n),$$

unde σ_k este suma tuturor minorilor diagonali de ordin *k* ai matricei *A* (un minor diagonal este format cu linii şi coloane de aceiaşi indici).

1.9. Observații.

a) Notăm cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Dintre coeficienții polinomului său caracteristic, remarcăm:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{not}{=} \text{tr}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \text{ numit } \textbf{urma} \text{ matricei } A$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji} \right) = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j$$

şi

$$\sigma_n = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

În cazul în care $n = 3$, σ_2 este chiar urma matricei adjuncte A^*.

b) Pentru $n = 2$, relația Cayley–Hamilton devine $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$ iar pentru $n = 3$, $A^3 - \text{tr}(A) \cdot A^2 + \text{tr}(A^*) \cdot A - \det(A) \cdot I_3 = O_3$.

1.10. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci polinoamele caracteristice ale matricelor $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ coincid, adică $\det\left(A \cdot B - X \cdot I_n\right) = \det\left(B \cdot A - X \cdot I_n\right)$.

În particular, $\det\left(A \cdot B - I_n\right) = \det\left(B \cdot A - I_n\right)$.

1.11. Propoziție. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, numărul

$$V\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

se numeşte determinant *Vandermonde* şi este egal cu

$$\prod_{2 \leq i \leq n} \left(\left(a_i - a_1\right) \cdot \left(a_i - a_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_i - a_{i-1}\right)\right).$$

1.12. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci

$$\det\left(A + B\right) + \det\left(A - B\right) = 2\left(\det\left(A\right) + \det\left(B\right)\right).$$

1.13. Propoziție. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $AB = BA$, atunci $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$.

1.14. Teoremă. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{C}\right)$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{C}\right)$, atunci

$$\operatorname{rang}\left(A \cdot B\right) \leq \min\left(\operatorname{rang}\left(A\right), \operatorname{rang}\left(B\right)\right).$$

1.15. Teoremă. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci

$$\operatorname{rang}\left(A \pm B\right) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

1.16. Teoremă (Sylvester). Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{C}\right)$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{C}\right)$, atunci are loc inegalitatea:

$$\operatorname{rang}\left(A \cdot B\right) \geq \operatorname{rang}\left(A\right) + \operatorname{rang}\left(B\right) - n.$$

1.17. Teoremă (Frobenius). Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbb{C}\right)$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}\left(\mathbb{C}\right)$ şi $C \in \mathcal{M}_{n,q}\left(\mathbb{C}\right)$, atunci

$$\operatorname{rang}\left(A \cdot C \cdot B\right) + \operatorname{rang}\left(C\right) \geq \operatorname{rang}\left(A \cdot C\right) + \operatorname{rang}\left(C \cdot B\right).$$

1.18. Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are $\operatorname{rang}\left(A\right) = 1$, atunci există $a \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^2 = a \cdot A$.

1.19. Observație. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Există polinoame nenule din $K[X]$ care au rădăcina A, de exemplu p_A.

1.20. Propoziție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi f un polinom de grad minim printre polinoamele nenule din $K[X]$ care au rădăcina A. Pentru orice $g \in K[X]$ care are rădăcina A, există $q \in K[X]$ astfel încât $g = f \cdot q$, adică f divide g în $K[X]$.

1.21. Observație. Fie $f = a_d X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_d \neq 0$, polinomul din enunțul propoziției **1.20**. Polinomul $a_d^{-1} f$ are de asemenea rădăcina A, este monic (are coeficientul dominant egal cu 1) şi are tot gradul d.

Dacă f_1 şi f_2 sunt două polinoame monice de grad d din $K[X]$ care au rădăcina A, atunci $f_1 = f_2$. Într-adevăr, din **1.20.** rezultă că f_1 şi f_2 se divid reciproc în $K[X]$ şi fiind monice, obținem că $f_1 = f_2$.

1.22. Definiție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Polinomul monic $m_A \in K[X]$ de grad minim care are rădăcina A se numeşte **polinomul minimal** al lui A.

1.23. Exemplu. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic al lui A este:

$$p_A = \det(A - X \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)(X-2)^2.$$

Divizorii lui p_A sunt $1, X-1, X-2, X^2-3X+2, X^2-4X+4, (X-1)(X-2)^2$.

Polinomul m_A este polinomul de grad minim care are rădăcina A, dintre divizorii lui p_A. Prin calcul, deducem că $m_A = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$.

1.24. Propoziție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Atunci m_A divide p_A în $K[X]$, adică polinomul minimal este un divizor al polinomului caracteristic.

1.25. Definiție. Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $f \in K[X]$ un polinom de grad $k \in \mathbb{N}^*$.

Spunem că f e **reductibil** peste K, dacă există $g, h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$, cu $\text{grad}(g) < k$ şi $\text{grad}(h) < k$. În caz contrar, spunem că f este un polinom **ireductibil** peste K.

1.26. Observație. Polinoamele ireductibile peste $\mathbb{C}$ sunt cele de gradul 1, iar peste $\mathbb{R}$, cele de gradul 1 şi cele de gradul 2 fără rădăcini reale.

1.27. Observație. Polinomul minimal al unei matrice nu este obligatoriu ireductibil, după cum rezultă din exemplul **1.23**.

1.28. Teoremă (Frobenius). Fie $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ un corp de numere şi $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Polinoamele p_A şi m_A admit aceiaşi divizori ireductibili peste K.

Enunţuri

1.1. Fie n un număr par, $n \geq 2$. Arătați că în mulțimea S_{3n} a permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ există elemente de ordin $n^3 - n$ (ordinul unei permutări σ este cel mai mic număr $k > 0$, pentru care $\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ = permutarea identică, unde compunerea se face de k ori).

Leonard Giugiuc, Turnu Severin (**S:L13.25**)

1.2. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea matricelor de ordin n care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

a) Demonstrați că există o funcție bijectivă $\varphi: S_n \to \mathcal{P}$, unde S_n este mulțimea permutărilor de ordin n.

b) Demonstrați că $AB \in \mathcal{P}$, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$.

c) Arătați că orice matrice $A \in \mathcal{P}$ este inversabilă şi $A^{-1} \in \mathcal{P}$.

d) Calculați $S = \sum\limits_{A \in \mathcal{P}} (\det(A))^2$.

Marius Perianu, Slatina (**S:L15.341**)

1.3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ să avem $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sigma(i)\sigma(i+1)} = \frac{k-1}{k}$.

Dana Heuberger (**4**, SGM 3/2012)

1.4. Calculați maximul expresiei $\sum\limits_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$, unde σ parcurge S_n, mulțimea permutărilor cu n elemente.

* * * (**8**, SGM 4/2012)

1.5. Pentru $\sigma \in S_{2n}$ considerăm suma $S_\sigma = |1 - \sigma(1)| + |2 - \sigma(2)| + \ldots + |2n - \sigma(2n)|$.

a) Calculați S_π, unde $\pi \in S_{2n}$ este permutarea care are numărul maxim de inversiuni.

b) Calculați $M = \max\limits_{\sigma \in S_{2n}} S_\sigma$.

c) Dacă $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_{2n} \mid S_\sigma = M\}$, calculați $\frac{\text{card}(\mathcal{A}_n)}{\text{card}(S_{2n})}$.

Radu Vasile, Brăila (**S:L15.263**)

1.6. Se consideră permutările $\sigma, \tau \in S_n$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{\tau(k)}$.

Eduard Buzdugan, Slatina (**S:L15.343**)

1.7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$. Aflați x şi y.

Petrică Dicu, Sibiu (**3**, SGM 12/2012)

1.8. Determinați două matrice A şi B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, pentru care $A^3 + B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(**S:L16.01**)

1.9. Arătați că, date fiind numerele reale a, b, cu $a > 0$, există o infinitate de matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Rică Zamfir, Bucureşti (**S:L16.182**)

1.10. Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 50 & 20 \end{pmatrix}$. Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ există două matrice X_n, Y_n cu coeficienți în $\mathbb{Q}$, astfel încât $A^n = X_n^2 + Y_n^2$.

Adrian Zanoschi, Iaşi (**S:L16.148**)

1.11. Determinați matricele X de ordin 2, cu elemente reale, pentru care:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}.$$

Discutați răspunsul după valorile parametrului real m.

Dan Negulescu, Brăila (**8**, SGM 9/2012)

1.12. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 2 \end{pmatrix}$, unde $d = \det(X)$.

Georgeta Burtea, Alexandria (**S:L15.103**)

1.13. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $X^u + X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde $u = \operatorname{tr}(X)$.

Georgeta Burtea, Alexandria (**S:L15.101**)

1.14. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ care verifică relația $A^2 - 8A + 7I_2 = O_2$.

Aurel Doboşan, Lugoj (**S:L15.305**)

1.15. Fie matricele $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{C}$, şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 210 & 20 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{C}$ ecuația $A_x^{20} = B$.

Iuliana Chilom şi *Silvia Bumbu*, Bistrița (**S:L15.186**)

1.16. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$. Determinați A^n cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Aurel Doboşan, Lugoj (**S:L16.26**)

1.17. Determinați matricea A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Petre Năchilă şi *Mihai Vasile* (**S:L13.308**)

1.18. Fie $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{n \cdot 4^{2n}}$, unde p_n reprezintă produsul elementelor nenule ale matricei A^n.

Mirela Dănilă, Constanța (**S:L16.105**)

1.19. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați:

a) A^n, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\dfrac{s_n \pi}{n}\right)$, unde s_n este suma elementelor matricei A^n.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila (**S:L15.266**)

1.20. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, cu proprietatea $x_{n+k} + x_{n-k} = x_{5n}$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq k$. Calculați A^n, unde $A = \begin{pmatrix} 1+x_{2016} & 0 & 0 \\ 2 & 1+x_{2016} & 0 \\ 3 & 4 & 1+x_{2016} \end{pmatrix}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:L15.261**)

1.21. Găsiți două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$ şi $AB \neq BA$.

Florin Stănescu, Găeşti (**S:L15.146**)

1.22. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice astfel încât $AB^2A + BA^2B = 2(AB)^2$ şi $\text{tr}(AB) \neq 0$, arătați că $AB = BA$.

Florin Stănescu, Găeşti (**S:L15.147**)

1.23. Fie A şi B două matrice pătratice de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot AB + A + B = O_n$. Arătați că $AB = BA$.

Ciprian Călin, Reşița (**S:L14.345**)

1.24. Există matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^k \neq O_n$ pentru orice $k = \overline{1, 2014}$ şi $A^{2015} = O_n$?

* * * (**S:L15.21**)

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

Capitolul I. ALGEBRĂ

1.1. (S:L13.25) Să observăm că permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1\end{pmatrix}\in S_n$ are ordinul n. Dar $n^3-n=(n-1)n(n+1)$, prin urmare permutarea:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n\\ n-1 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & 2n-1 & n & n+1 & \ldots & 2n-2 & 3n & 2n & 2n+1 & \ldots & 3n-1\end{pmatrix}$$

are ordinul n^3-n.

1.2. (S:L15.341) a) Definim $\varphi: S_n\to\mathcal{P}$, $\varphi(\sigma)=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$, cu $a_{ij}=\begin{cases}1, & \sigma(i)=j\\ 0, & \sigma(i)\neq j\end{cases}$, $\forall\, i,\, j=\overline{1,n}$. De exemplu, pentru $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\in S_4$, avem:

$$\varphi(\sigma)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$ Dacă $\sigma(i)=j$, atunci pentru orice $k\neq i$ avem $\sigma(k)\neq j$, deci pe coloana j nu mai există 1. Mai mult, pentru orice $t\neq j$ avem $\sigma(i)\neq t$, adică pe linia i nu mai există alt 1. În consecință, $\varphi(\sigma)\in\mathcal{P}$, adică funcția φ este bine definită.

Fie $\alpha,\beta\in S_n$ cu $\varphi(\alpha)=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$ şi $\varphi(\beta)=(b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Presupunem că $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. Fie $i=\overline{1,n}$. Atunci, $a_{ij}=b_{ij}=1\Leftrightarrow\alpha(i)=\beta(i)=j$. Aşadar $\alpha=\beta$, deci φ este injectivă. Fie $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}\in\mathcal{P}$. Fie $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Pe linia i există un unic $k_i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $a_{i,k_i=1}$. Deoarece există câte un singur 1 pe fiecare coloană, numerele $k_1,k_2,\ldots,k_n$ sunt distincte două câte două. Definim $\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$, $\sigma(i)=k_i$, pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Deoarece numerele $k_1,k_2,\ldots,k_n$ sunt distincte două câte două, rezultă că σ este bijectivă şi că avem $\varphi(\sigma)=A$. Aşadar funcția φ este şi surjectivă, deci este o bijecție.

b) Fie $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}\in\mathcal{P}$ şi $B=(b_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}\in\mathcal{P}$ şi $\alpha,\beta\in S_n$ astfel încât $A=\varphi(\alpha)$, $B=\varphi(\beta)$. Fie $C=AB=(c_{ij})_{i,\,j=\overline{1,n}}$. Fie $a_{i,k_i}=1$ singurul element nenul de pe linia i a matricei A şi $b_{k_i,t_i}=1$ singurul element nenul al liniei k_i a matricei B. Înmulțind pe rând linia i a lui A cu coloanele lui B, obținem zerouri, cu excepția elementului $c_{i,t_i}=a_{i,k_i}\cdot b_{k_i,t_i}=1$. Adică $c_{is}=0$, pentru orice $s\neq t_i$, deci singurul element nenul de pe linia i a matricei C este c_{i,t_i}. Dacă înmulțim oricare altă linie a matricei A cu coloana t_i a matricei *B*, obținem zerouri, deci $c_{j,t_i}=0$, pentru orice $j\neq i$, adică există un singur 1 pe coloana t_i a matricei *C*. Aşadar $C=AB\in\mathcal{P}$. Mai mult, avem $(\beta\alpha)(i)=\beta(\alpha(i))=\beta(k_i)=t_i$, şi $c_{i,t_i}=1$, deci $C=AB=\varphi(\beta\alpha)$. Adică:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)=\varphi(\beta\alpha),\ \forall\,\alpha,\beta\in S_n. \tag{1}$$

c) Pentru permutarea identică $e\in S_n$, avem $\varphi(e)=I_n$. Fie $A\in\mathcal{P}$ şi unica permutare $\alpha\in S_n$ astfel încât $A=\varphi(\alpha)$. Din $I_n=\varphi(e)=\varphi\left(\alpha\cdot\alpha^{-1}\right)\overset{(1)}{=}\varphi\left(\alpha^{-1}\right)\cdot\varphi(\alpha)=\varphi\left(\alpha^{-1}\right)\cdot A$ şi $I_n=\varphi\left(\alpha^{-1}\cdot\alpha\right)\overset{(1)}{=}\varphi(\alpha)\cdot\varphi\left(\alpha^{-1}\right)=A\cdot\varphi\left(\alpha^{-1}\right)$ folosind unicitatea inversei unei matrice deducem că există $A^{-1}=\varphi\left(\alpha^{-1}\right)\in\mathcal{P}$.

d) Pentru orice matrice $A\in\mathcal{P}$, în $\det(A)=\sum\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$, avem un singur termen nenul, deci $\det(A)\in\{-1,1\}$. Deoarece funcția φ este bijectivă, $|\mathcal{P}|=|S_n|=n!$, deci $S=\sum\limits_{A\in\mathcal{P}}(\pm1)^2=n!$.

1.3. (4, SGM 3/2012) Pentru *n* = 2, cele două permutări din S_2 sunt soluții. Pentru $n\geq 3$ şi $k\in\{2, 3, \ldots, n\}$, avem $\sum\limits_{i=1}^{k-2}\dfrac{1}{\sigma(i)\sigma(i+1)}=\dfrac{k-2}{k-1}$ şi folosind în relația din enunț, obținem $\dfrac{1}{\sigma(k-1)\sigma(k)}=\dfrac{k-1}{k}-\dfrac{k-2}{k-1}$. Aşadar, $\forall\, k\in\{2, 3, \ldots, n\}$, avem $\sigma(k-1)\cdot\sigma(k)=$ $=k(k-1)$. Obținem $\sigma(n-1)\cdot\sigma(n)=n(n-1)$ şi cum $\sigma(n-1)\cdot\sigma(n)\leq n(n-1)$, egalitatea are loc numai dacă $\begin{cases}\sigma(n-1)=n-1\\ \sigma(n)=n\end{cases}$ sau $\begin{cases}\sigma(n-1)=n\\ \sigma(n)=n-1\end{cases}$. În primul caz, avem $\sigma = e$. În cazul al doilea, obținem $n\cdot\sigma(n-2)=(n-2)(n-1)$, deci $n\mid(n-2)(n-1)$ şi cum $(n, n-1)=1$, deducem că $n\mid(n-2)$, fals.

1.4. (8, SGM 4/2012) Fie $S_\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n}|\sigma(k)-k|$, pentru $\sigma\in S_n$. Observăm mai întâi că pentru permutarea $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n-1 & n\\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1\end{pmatrix}$, avem $S_\pi=2((n-1)+(n-3)+\ldots)=\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$.

Fie $\sigma\in S_n\setminus\{e\}$ astfel încât S_σ să fie maximă. Evident, $S_\sigma\geq\left[\dfrac{n^2}{2}\right]=S_\pi$. Arătăm că $S_\sigma=\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$. Dacă $\sigma\neq\pi$, există $t,s\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru care $t+s=n$, astfel încât partiționând $\{i_1, i_2, \ldots, i_t, j_1, j_2, \ldots, j_s\}=\{1, 2, \ldots, n\}$, să avem $\sigma(i_k)\leq i_k$, $\forall\, k=\overline{1,t}$ şi $\sigma(j_k)>j_k$, $\forall\, k=\overline{1,s}$. Obținem $S_\sigma=(i_1-\sigma(i_1))+(i_2-\sigma(i_2))+\ldots+(i_t-\sigma(i_t))+$ $+(\sigma(j_1)-j_1)+(\sigma(j_2)-j_2)+\ldots+(\sigma(j_s)-j_s)$; $S_\sigma=\underbrace{(i_1+i_2+\ldots+i_t)}_{\overset{\text{not}}{=}a}+$