MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Anca Pascu, Bianca Vişan
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
MANEA, COSMIN
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 6-a / Cosmin Manea, Dragoş Petrică, Adrian Țurcanu ; coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu. - Piteşti : Cartea Românească Educațional, 2018
ISBN 978-606-8982-09-0
Index
I. Petrică, Dragoş
II. Țurcanu, Adrian
III. Gologan, Radu (coord.)
IV. Cicu, Ion (coord.)
V. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Cosmin Manea, Dragoș Petrică, Adrian Țurcanu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a VI-a

(2008 - 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

PREFAŢĂ

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii româneşti. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 şi nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, şi-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Aşa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă şi azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintaşilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie şi nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes şi vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile şi creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan
Preşedintele Societății de Ştiințe Matematice din România

ALGEBRĂ

Capitolul I
MULŢIMI ŞI DIVIZIBILITATE

1. Aflaţi numerele naturale n şi m care verifică simultan condiţiile:

(i) $n = 5^y \cdot 11^x$; (ii) $m = 2^x \cdot 11^z$;

(iii) n are 15 divizori naturali; (iv) m are 12 divizori naturali.

Neculai Stanciu, Berca, Buzău (**S:E08.72**)

2. Fie numerele prime n, $n + 1$ şi $n + 11$. Arătaţi că numărul:

$$a = n^n + (n+1)^{n+1} + (n+11)^n$$

este divizibil cu 100.

Doina Stoica şi *Mircea Mario Stoica*, Arad (**S:E08.74**)

3. Aflaţi c.m.m.d.c. al numerelor $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100$ şi $B = 4^{41} \cdot 5^{27}$.

Gheorghe Căzănel, Dărmăneşti, Bacău (**S:E08.78**)

4. Aflaţi numerele naturale nenule a căror diferenţă este egală cu câtul lor.

Gheorghe Stoica, Petroşani (**S:E08.79**)

5. Se dă numărul $A = 4^{2002} \cdot 5^{4007} + 280$.

a) Precizaţi primele cinci cifre ale lui A şi ultimele cinci cifre ale lui A.

b) Arătaţi că numărul A este divizibil cu 2; 3; 4; 5; 9; 10.

c) Arătaţi că numărul A nu este pătrat perfect.

Ioana Crăciun şi *Gheorghe Crăciun*, Ploieşti (**S:E08.111**)

6. Dacă a, b, c sunt trei numere naturale astfel încât $11a + 6b = 5c$, arătaţi că 110 divide numărul $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Vasile Coman, Vălenii de Munte (**S:E08.112**)

7. Se dă numărul $A = (2n+1)(4n+3)(7n+1)$. Arătaţi că:

a) A se divide cu 3, oricare ar fi n număr natural;

b) există n număr natural astfel încât A se divide cu 24.

Maria Borovina, Ploieşti (**S:E08.113**)

8. Să se rezolve ecuaţia $n + [n, 8] = 36$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $[n, 8]$ este c.m.m.m.c. al numerelor n şi 8.

Cătălin Năchilă, Ploieşti (**S:E08.122**)

9. În produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2007 \cdot 2008$ se elimină toate numerele pare şi acelea care au ultima cifră 5. Determinaţi ultima cifră a produsului numerelor rămase.

*** (**S:E08.158**)

10. Să se arate că: $2008 \mid 2009 + 2009^2 + ... + 2009^{2008}$.

Cristian Moanţă, Craiova (**S:E08.169**)

11. Arătaţi că numărul $A = 1973 \cdot 1968^{1973} + 1975 \cdot 1970^{1975} - 2$ este divizibil cu 1969.

Vasile Sabou, Baia Mare (**S:E09.12**)

12. Fie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 cinci numere naturale distincte între ele, care verifică egalitatea:

$$(2009 - x_1)(2009 - x_2)(x_3 - 2009)(x_4 - 2009)(x_5 - 2009) = 2009.$$

Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \vdots 41^2$.

Vasile Ienuțaş, Baia Mare (**S:E09.19**)

13. Fie $a > b$ astfel încât $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, a, b sunt numere prime. Definim:

$$m = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ba} + 1\right),\ n = \frac{1}{4}\left(3 \cdot \overline{ab} + 2 \cdot \overline{ba} - 1\right),\ p = \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2\right).$$

a) Arătați că p nu este număr prim.

b) Determinați x din ecuația $\dfrac{p}{x-3} = \overline{ba}$.

Gizela Pascale, Târgovişte (**S:E09.58**)

14. Determinați numerele de forma $\overline{xxxyyy}$ divizibile cu 2009.

Daniel Cojocaru, Slatina, Olt (**S:E09.213**)

15. Aflați cel mai mic număr $N = 5^{3-n} \cdot 13^{5-n} + 5^{5-n} \cdot 13^{3-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, divizibil cu 250.

Neculai Stanciu, Berca, Buzău (**S:E09.217**)

16. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ notăm $A = 9a + 13b$ şi $B = 8a + 11b$. Arătați că A se divide cu 5 dacă şi numai dacă B se divide cu 5.

Vasile Tarciniu, Odobeşti, Vrancea (**S:E09.222**)

17. Fie p un număr prim. Aflați toate numerele naturale care au p divizori numere naturale.

Viorel Botea, Brăila (**S:E10.11**)

18. Determinați numerele naturale nenule a şi b, ştiind că suma lor este 150 şi:

$$[a, b] - a = (a, b) + b.$$

Am notat $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b şi (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Lucian Neagu, Alexandria (**S:E10.48**)

19. Numerele a şi b au câte 1005 divizori naturali. Este posibil ca produsul lor să aibă exact 2010 divizori?

Cătălin Budeanu, Iaşi (**S:E10.87**)

20. Fie numărul $A = 2009 \cdot 2009^2 \cdot \ldots \cdot 2009^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați n, astfel încât A să aibă exact 946 de divizori.

Mihai Crăciun, Paşcani (**S:E10.88**)

21. Fiind date mulțimile $A = \{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 503 + 4l, l \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 4m + 3, m \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x \mid x = 3n + 499, n \in \mathbb{N}\}$, arătați că $A \cap B = C \cap D$.

Delia Ioana Andrei, elevă, Iaşi (**S:E10.90**)

22. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relația:

$$\overline{abc} = a \cdot \overline{bc} + b \cdot \overline{ca} + c \cdot \overline{ab},$$

unde a, b, c sunt cifre nenule în baza zece.

Dragomir Costea, Gherla (**S:E10.125**)

23. a) Arătați că numărul $8^7 + 27^7 + 125^7 + 2010^7$ este divizibil cu 7.

b) Determinați toate numerele naturale n, pentru care numărul $A = 2008^n + 2010^n + 2012^n$ se divide cu 2010.

Ionel Tudor, Călugăreni şi *Dumitru Vieru*, Dorohoi, Botoşani (**S:E10.138**)

24. Suma a 17 numere naturale nenule şi distincte este 154. Arătați că produsul lor este divizibil cu 3^8.

Luca Tuță, Buzău (**S:E10.209**)

25. Aflați numărul $A = 300^n - 105^n - 286^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu 91.

Marin Chirciu, Piteşti (**S:E10.233**)

26. Găsiți numerele $\overline{ab}$, astfel încât $\overline{ab} + \overline{ba} + a + b$ să fie cub perfect.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova (**S:E10.250**)

27. Numărul natural A, împărțit la 48, dă restul 41 şi împărțit la 50 dă restul 9. Aflați numărul A, ştiind că suma celor două câturi este 81.

Ion Neață, Slatina (**S:E10.251**)

28. Suma a două numere naturale este 140, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 168. Aflați cele două numere.

Vasile Chioreanu, Carei, Satu Mare (**S:E10.252**)

29. Determinați numerele $\overline{abc}$, ştiind că cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{abc}$ şi $\overline{cba}$ este 36.

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță,* Blaj (**S:E10.253**)

30. Să se arate că numerele $a = 2^{2010} + 3^{2010}$ şi $b = 2^{2010} + 3^{2010} + 4^{2010}$ nu sunt pătrate perfecte.

Gabriela Dincă şi *Viorel Dincă*, Giurgiu (**S:E10.256**)

31. Fie numărul $\overline{abcd}$ în baza zece cu cifre mai mici decât 4. Demonstrați că: $a + b + c + d$ divide numărul $\overline{dabc}$ dacă şi numai dacă divide numărul:

$$\overline{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}\,.$$

Virginia Tică-Diaconu (**S:E10.286**)

32. Fie a, b numere naturale nenule. Arătați că dacă $3a + 2b$ se divide cu 67, atunci numărul $x = 6^n \cdot 1920 \cdot 4^n \cdot a + 8^n \cdot 1950 \cdot 3^n \cdot b$ se divide cu 2010, pentru orice n număr natural.

Virginia Tică-Diaconu (**S:E10.289**)

33. Determinați cel mai mic număr natural n care se divide cu 28, are suma cifrelor 28 şi are ultimele două cifre 28.

* * * (**IX.2/Aprilie 2011**)

34. Considerăm toate numerele de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pentru fiecare număr format, considerăm toate diferențele posibile a câte două din cifrele sale. Arătați că produsul tuturor acestor diferențe, pentru toate numerele formate, este un pătrat perfect.

* * * (**S:E11.158**)

35. Fie p, q două numere prime consecutive pentru care avem $2 \cdot p + 3 \cdot q = 5 \cdot n$, cu $n \in \mathbb{N}$. Arătați că n este număr compus.

* * * (**X.6/Februarie 2012**)

36. Demonstrați că ecuația $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

* * * (**IX.2/Martie 2012**)

37. Aflați numerele p, știind că p, $p + 4$, $p + 20$ sunt numere prime.

Septimiu Voiculeț, Crevenicu, Teleorman (**S:E12.395**)

38. Fie numerele a, b, c numere naturale nenule astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

a) Arătați că numărul $p = (a^{2012} + b^{2012})(b^{2012} + c^{2012})$ este pătrat perfect.

b) Dacă $b = 10$, aflați suma ultimelor 2012 cifre ale lui p.

Tudor Cristea, Alexandria (**S:E12.397**)

39. Să se afle restul împărțirii numărului natural:

$$A = (9n^2 + 6n + 1)^{3n^2+4n-1} + 27n^2 + 18n + 10 \text{ la } B = 9n^2 + 6n + 1, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Viorel Tudoran și *Alfred Eckstein*, Arad (**S:E12.517**)

40. Fie $a = 2011^m + 2013^n + 2014$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Determinați restul împărțirii numărului a la 2012.

Nelu Don, Curtici, Arad (**S:E12.519**)

41. Fie n și p numere naturale nenule, p prim, astfel încât $p + 95 = n!$, unde:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Determinați n și p.

Mihai Vijdeluc, Baia Mare (**S:E12.565**)

42. Cercetați dacă există 9 numere naturale prime, diferite două câte două, a căror sumă să fie 125.

* * * (**S:E12.591**)

43. Arătați că numărul $13^{13} + 43^{43}$ este divizibil cu 14.

* * * (**S:E12.592**)

44. Aflați numărul natural a, știind că resturile împărțirii numerelor 122, 192 și 285 la a sunt numere consecutive.

* * * (**S:E12.594**)

45. Arătați că, oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte, există două a căror diferență se divide cu 10.

* * * (**S:E12.595**)

46. Aflați numerele naturale a, b, c, știind că suma lor este 255 și că $a - 14$, $b - 4$, $c + 9$ sunt numere consecutive, din care $c + 9$ este cel mai mic.

* * * (**S:E12.597**)

47. Arătați că numărul $p = \frac{10^n - 55}{45}$ este natural, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

* * * (**S:E12.598**)

48. Aflați numerele naturale m și n, știind că $3 \cdot n! + 28 = m^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Cătălina Oprea, Buzău (**S:E12.618**)

49. Determinați numerele naturale prime a, b, c, astfel încât:

$$a + \frac{2bc}{b^2 + c^2} = \frac{100}{17}.$$

Cristina Vijdeluc și *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare (**S:E13.27**)

50. Arătați că numărul $A = n^2 + 2n - 1$ nu se divide cu 3, oricare ar fi numărul întreg n.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat (**S:E13.31**)

51. Arătați că numărul $2^n + 3^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

* * * (**S:L13.87**)

52. Arătați că numărul $A = \dfrac{21^n + 23^n - 2^{2n} + 2^{n+1} \cdot 3^2}{38}$ este număr natural pentru orice n număr natural nenul.

Maria Petrescu, Bucureşti (**S:E13.92**)

53. Fie numerele întregi a, b, c astfel încât $20a - 7c = 15b$. Arătați că $(a + b) \cdot c$ este divizibil cu 35.

Maria Petrescu, Bucureşti (**S:E13.106**)

54. Fie numărul $N = 2n^2 - 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Descompuneți N în produs de doi factori.

b) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că N este număr prim.

Valentin Preda, Bucureşti (**S:E13.109**)

55. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale mai mici sau egale cu 2013 care nu se divid cu suma divizorilor proprii şi primi ai lui 2013.

Cristina Vijdeluc şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare (**S:E13.178**)

56. Aflați numerele prime $\overline{ab}$, ştiind că $a \cdot b$ şi $b : a$ sunt numere prime.

Cristina Vijdeluc şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare (**S:E13.180**)

57. Determinați p număr natural pentru care p, $p + 2$, $p + 4$, $p + 8$ şi $p + 16$ sunt simultan prime.

Gheorghe Bumbăcea, Buşteni (**S:E13.291**)

58. Să se găsească cel mai mic număr natural care are acelaşi număr de divizori ca 615.

Mariana Fleancu, Câmpulung Muscel (**S:E13.332**)

59. Determinați toate numerele naturale n astfel încât numărul $\dfrac{1+2+...+n}{2}$ să fie prim.

Neculai Stanciu, Buzău şi *Titu Zvonaru*, Comăneşti (**S:E13.336**)

60. Demonstrați că numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17, oricare ar fi n număr natural.

Ion Pîrşe, Câmpulung Muscel (**S:E13.345**)

61. Se consideră numerele $a_1 = 4$, $a_2 = 3a_1 + 4$, $a_3 = 3a_2 + 4^2$, …, $a_{2013} = 3a_{2012} + 4^{2012}$.

a) Calculați a_{2013}.

b) Arătați că $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}) \vdots \dfrac{2^{22} - 1}{3}$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:E14.13**)

62. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\left(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}\right) \vdots \overline{abc}$.

Daniela Stănică şi *Nicolae Stănică*, Brăila (**S:E14.14**)

63. Fie mulțimile $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 3, 6\}$, $A_4 = \{1, 3, 6, 10\}$, $A_5 = \{1, 3, 6, 10, 15\}$, …

a) Calculați $A_{20} \setminus A_{19}$.

b) Verificați dacă există n număr natural astfel încât $2013 \in A_n$.

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 7 din A_{2013}.

Daniela Covaci, Brăila (**S:E14.15**)

64. Aflați valoarea maximă a numărului natural n, știind că 4^n divide produsul:

$$p = 504 \cdot 505 \cdot 506 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2013.$$

Artur Bălăucă, Botoșani (**S:E14.16**)

65. Arătați că:

$$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 - 2.$$

Nazely Boicescu, Brăila (**S:E14.17**)

66. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, d, e, n, știind că:

$$2^{a+3} \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 7^d \cdot 11^e = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Mihaela Balta, Brăila (**S:E14.18**)

67. Demonstrați că numerele $3^{3^{2013}} + 1$ și $3^{3^{2015}} + 10$ sunt prime între ele.

Nazely Boicescu, Brăila (**S:E14.19**)

68. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

$$1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \ldots + 2004^{2013} \vdots 6.$$

Daniela Covaci, Brăila (**S:E14.20**)

69. Arătați că numărul $\dfrac{2009^2 + a^2}{6}$ nu poate fi pătratul unui număr rațional, oricare ar fi numărul întreg a.

Dan Negulescu, Brăila (**S:E14.40**, enunț modificat)

70. Găsiți numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab} = a^3 + b^3$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova (**S:E14.53**)

71. Se consideră numărul $n = 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$.

a) Aflați restul împărțirii lui n la 5.

b) Arătați că $9 \mid n$.

Ionel Tudor, Călugăreni și *Viorica Dogaru*, Oinacu, Giurgiu (**S:E14.77**)

72. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 2432$ și $(a, b, c) = 8$. Calculați media aritmetică a numerelor a, b, c.

Concursul „Micul matematician”, Negrești-Oaș (**S:E14.91**)

73. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele $a = 4^{n+2} \cdot 5^{2n} + 2$, $b = 2^{2n} \cdot 25^{n+1} - 1$, $c = 2 \cdot 4^{n+2} \cdot 5^{2n} + 1$, $d = 2^{2n+3} \cdot 5^{2n} - 2$. Arătați că:

a) numerele a, b, c, d nu sunt prime;

b) $a + b + c + d$ este pătrat perfect.

Concursul „Micul matematician”, Negrești-Oaș (**S:E14.92**)

74. Arătați că numărul $A = 2n^3 + n + 6$ se divide cu 3, oricare ar fi n număr întreg.

Luca Tuță, Buzău (**S:E14.117**)

75. Arătați că orice număr natural cu 2007 divizori este pătrat perfect.

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj (**S:E14.131**)

76. Pentru câte numere $\overline{abc}$ există un număr $\overline{def}$, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

i) $\overline{abc}+\overline{def}$ este pătrat perfect;

ii) $a+d=n,\ b+e=n+1,\ c+f=n+2.$

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj (**S:E14.139**)

77. Fie x, y, z numere întregi care verifică relația $z^2=x^2+y^2$. Arătați că $4\mid x$ sau $4\mid y$.

Vasile Scurtu, Bistrița (**S:E14.145**)

78. Să se arate că numărul $3^{3n+1}+10$ este divizibil cu 13.

* * * (**S:E14.173**)

79. Arătați că numărul $\dfrac{n^3+6n^2+5n}{6}$ este natural, oricare ar fi n numărul natural.

* * * (**S:E14.184**)

80. Să se determine numerele naturale nenule a şi b astfel încât $E(a,b)=a^2\cdot 2^{3k-2}+9b$ să se dividă cu 7, oricare ar fi $k\geq 1$, număr natural.

* * * (**S:E14.199**)

81. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm cu P_n produsul divizorilor naturali ai numărului *n*. Să se determine *n* cu proprietatea că $P_n=6^{1575}$.

* * * (**S:E14.212**)

82. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în sistemul zecimal pentru care:

$$\overline{abc}+a+b+c=p^3,\ p\in\mathbb{N}.$$

* * * (**S:E14.218**)

83. Să se determine cifra x pentru care numărul $N=\overline{2014x11}$ să se dividă cu 17.

* * * (**S:E14.220**)

84. Demonstrați că printre 2025 de numere naturale distincte există 729 de numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:E14.224**)

85. Arătați că dacă 2^m+2^n este număr prim, atunci:

$$(m,n)\in\left\{(0,0),\left(2^k,0\right),\left(0,2^k\right)\mid k\in\mathbb{N}\right\}.$$

* * * (**S:E14.233**)

86. Se consideră mulțimea $A=\{p\mid p$ număr prim şi p^2+2 număr prim$\}$. Câte elemente are mulțimea *A*?

Ovidiu Bobb, Copalnic-Mănăştur, Maramureş (**S:E15.14**)

87. Să se arate că dacă *p* este număr prim şi p^2+p+13 este pătrat perfect, atunci numărul p^3+p+13 este număr prim.

Georgeta Burtea, Alexandria (**S:E15.94**)

88. Se consideră numărul $a_n = 18\underbrace{77...77}_{n}889$, cu n număr natural, şi c_n câtul împărțirii numărului a_n la 13.

a) Să se arate că a_n se divide cu 13 pentru oricare n.

b) Să se determine n pentru care $s(a_n) = 2s(c_n)$, unde $s(m)$ reprezintă suma cifrelor numărului m.

Marius Burtea, Alexandria (**S:E15.107**)

89. Un număr natural n este *puternic* dacă are proprietatea: dacă un număr prim p divide n, atunci p^2 divide n. Găsiți numerele *puternice* de trei cifre care au exact şase divizori.

George-Florin Şerban, Brăila (**S:E15.132**)

90. Determinați numerele de forma $\overline{abab}$ care au exact şase divizori naturali.

George Florin Şerban, Brăila (**S:E15.133**)

91. Fie numerele naturale nenule a, b, c, d, e astfel încât:

$$(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) = 5005.$$

Arătați că numerele a, b, c, d, e nu pot fi toate numere prime.

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin (**S:E15.134**)

92. Determinați numerele naturale $a < b < c$, ştiind că $(a, b, c) = 3$ şi $[a, b, c] = 30$. (Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y şi $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.)

Vasile Scurtu, Bistrița (**S:E15.137**)

93. Fie $A = 2a + 3b + 4c$ şi $B = 7a + 8b + 9c$, unde a, b, c sunt numere naturale nenule. Arătați că 5 divide A dacă şi numai dacă 5 divide B.

Vasile Scurtu, Bistrița (**S:E15.138**)

94. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 50. La pasul 1 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor minus 2. La pasul 2 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor mărită cu 1. La pasul 3 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor minus 2. La pasul 4 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor mărită cu 1. Se continuă în acelaşi fel până la pasul 48 când pe tablă rămân două numere. Aflați suma celor două numere.

Concursul „Laurențiu Panaitopol", Giurgiu, 2015 (**S:E15.171**)

95. Aflați suma celor mai mici 32 de numere naturale a care împărțite la numărul natural $n > 1$ dau restul egal cu 1, iar împărțite la n^2 dau restul egal cu $n - 1$.

Iulian Bunu, Baia Mare (**S:E15.212**)

96. Arătați că numărul $a = 30 + 2^{2015}$ se divide cu 62.

Mihai Vijdeluc şi *Vasile Ienuțaş*, Baia Mare (**S:E15.213**)

97. Câte numere prime de trei cifre se transformă în cuburi perfecte dacă schimbăm ordinea cifrelor lor?

Vasile Ienuțaş, Baia Mare (**S:E15.216**)

98. Fie numărul $A = \underbrace{155155155...155}_{\text{2016 cifre}}$. Arătați că A este divizibil cu 2015.

Vasile Ienuțaş şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare (**S:E15.218**)

99. Aflați valorile lui n, număr natural nenul, pentru care numerele 2015^{n^2} şi 2015^n au ultimele patru cifre identice.

George Florin Şerban, Brăila (**S:E15.253**)

100. Fie mulțimile nevide A şi B cu proprietățile $A \cap B = \varnothing$ şi $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$.

a) Să se arate că suma dintre numerele pare din A şi numerele impare din B nu este egală cu suma dintre numerele pare din B şi numerele impare din A.

b) Dacă A conține cel puțin 1008 elemente, atunci conține cel puțin două numere consecutive.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:E15.260**)

101. Arătați că dacă a, b, c, d, e sunt numere naturale prime diferite, atunci:

$$abcd + bcde + cdea + deab + eabc + 1693 \leq 2abcde.$$

Aurel Doboşan, Lugoj (**S:E15.293**)

102. Aflați cel mai mare număr natural n pentru care 7^n divide $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2015$.

Aurel Doboşan, Lugoj (**S:E15.294**)

103. Aflați numerele prime a, b, c care verifică simultan relațiile:

$$c - ab = 15 \text{ şi } c - a^2 = 49.$$

Eugen Predoiu, Călăraşi (**S:E15.337**)

104. Fie $A = 3a + 5b$ şi $B = 2a + 3b$, unde a şi b sunt numere naturale nenule. Arătați că $(A, B) = (a, b)$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Vasile Scurtu, Bistrița (**S:E15.338**)

105. Arătați că $239 \mid \overline{\text{XFACTOR}}$ dacă şi numai dacă:

$$239 \mid \overline{\text{FACTORX}}.$$

* * * (**S:E16.12**)

106. O mulțime de numere naturale A cu cel puțin două elemente, o numim ideală dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $a \mid b$ sau $b \mid a$.

a) Construiți o mulțime ideală cu 3 elemente.

b) Arătați că dacă $p \geq 2$ este un număr prim, atunci mulțimea divizorilor numărului p^n este ideală, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați o mulțime ideală cu 8 elemente ştiind că suma elementelor sale este 255.

* * * (**S:E16.14**)

107. Arătați că numărul $a = (2n+1)(3n+2)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural.

* * * (**S:E16.54**)

108. Determinați numărul prim x ştiind că a, b sunt numere naturale pentru care:

$$x + a^3 + b^3 = a + b + 219.$$

* * * (**S:E16.56**)

109. Arătați că pentru orice număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ există un număr $\overline{xyzt}$ astfel încât cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{xyztabc}$ şi $\overline{abcxyzt}$ să fie $\overline{abc}$.

* * * (**S:E16.58**)

110. Suma a 2016 numere naturale consecutive este un număr divizibil cu 2015. Arătați că două dintre aceste numere sunt divizibile cu 2015.

* * * (**S:E16.95**)

111. Demonstrați că numărul:

$$a = 2^{n+4} \cdot 3^{n+5} + 2^{n+5} \cdot 3^{n+2} + 6^{n+3} \cdot 4,$$

unde n este un număr natural nenul, se divide cu 2016.

* * * (**S:E16.99**)

112. Stabiliți dacă numărul $a = 10^{2016} - 2^{10}$ este pătrat perfect.

* * * (**S:E16.138**)

113. Determinați n număr natural pentru care numerele naturale:

$$n - 5, n - 1, n + 3, n + 5, \; n + 9 \text{ şi } n + 11$$

sunt simultan numere prime.

* * * (**S:E16.140**)

114. Determinați cel mai mic număr cu 30 cifre, care are suma cifrelor 30 şi se divide cu 30.

* * * (**S:E16.178**)

115. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ numerele naturale astfel încât $3 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{13}$ şi $x_1 + x_2 + \ldots + x_{13} = 174$. Arătați că cel puțin unul dintre cele 13 numere este prim.

* * * (**S:E16.180**)

116. Arătați că numărul $3^{2015} + 10$ este divizibil cu 11.

* * * (**S:E16.181**)

117. Aflați numerele naturale nenule a, b, c știind că $\{2, a, b\} = \{7, a^2, c\}$.

Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmației (**S:E09.11**)

118. Se dau mulțimile $A = \{x \mid x = 2k + 5, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$, în care elementele sunt ordonate crescător.

a) Scrieți primele trei elemente din cele două mulțimi.
b) Verificați dacă $547 \in A$ și $547 \in B$.
c) Găsiți cel de-al 30-lea termen al lui A.
d) Arătați că cele două mulțimi sun disjuncte.

Simona Muscariu, Târgoviște (**S:E09.46**)

119. Determinați a, b, $c \in \mathbb{N}$ dacă:

i) $\{2005, 2009\} \cup \{a, b\} = \{2005, 2007, 2009\}$;

ii) $\{2007, 2009\} - \{b, c\} = \{2009\}$;

iii) $\{a, c\} = \{2005, 2009\}$.

Vasile Tarciniu, Odobești (**S:E09.208**)

120. Se consideră mulțimea $M = \{x^4 \mid x \in \{1, 2, \ldots, 10\}\}$. Determinați numărul minim de elemente care trebuie alese arbitrar din M, pentru a fi siguri că există două elemente alese având diferența divizibilă cu 10.

Cristian Lazăr, Iași (**S:E11.10**)

GEOMETRIE

Capitolul I
DREAPTA

1. Fie segmentul [*AB*] de lungime $AB = 2009 \cdot 1004$ cm şi punctele sale $A_1, A_2, ..., A_{2007}$ (în această ordine), astfel încât numerele $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{2007}B$ şi 1, 2, 3, ..., 2008 se află în directă proporționalitate. Se cere:

a) lungimea segmentelor $[AA_1]$ şi $[AA_2]$;

b) distanța dintre mijloacele segmentelor $[AA_{1010}]$ şi $[A_{1010}B]$.

Gheorghe Sfara, Baia Mare (**S:E09.14**)

2. Fie segmentul [*AB*] şi punctele $M, N \in (AB)$ cu $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}, \frac{NA}{NB} = \frac{8}{7}$. Notăm cu *P* mijlocul segmentului *MN*. Dacă *PB* = 19 cm, aflați lungimile segmentelor *AB*, *MA*, *MB*, *NA*, *NB*.

Gizela Pascale, Târgovişte (**S:E09.60**)

3. Se consideră punctele coliniare *A*, *B*, *C*, *D* (în această ordine), astfel încât *AB* = = 5 cm, *BC* = 4 cm şi *CD* = 6 cm. Aflați probabilitatea ca, alegând două puncte din cele patru, distanța dintre punctele alese să fie mai mare ca 8 cm.

Vasile Şerdean, Gherla (**S:E10.134**)

4. Fie segmentul *AB* cu lungimea de 200 cm. Considerăm punctele M_1, M_2, …, $M_{24} \in$ $\in (AB)$ care împart *AB* în segmente congruente. Aflați lungimea segmentului $M_{13}M_{20}$ şi lungimea segmentului *AP*, unde *P* este mijlocul segmentului $M_{18}M_{22}$.

Mariana Fleancu (**S:E10.291**)

5. Se dau punctele coliniare *A*, *B*, *C*, *D* în această ordine. Ştiind că $\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{BD} = \frac{2013}{2014}$, calculați $\frac{AD}{BC}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova (**S:E14.59**)

6. Se consideră segmentul *AB*. Notăm *M* mijlocul lui *AB*, M_1 mijlocul lui *BM*, M_2 mijlocul lui M_1A, M_3 mijlocul lui M_2B, M_4 mijlocul lui AM_3. Se ştie că $M_1M_3 = M_2M_4 +$ $+ 2$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului *AB*.

b) Notăm cu M_a şi M_b mijloacele segmentelor $[M_2M_4]$ şi $[M_1M_3]$. Arătați că M_a este mijlocul lui $[AM_b]$.

Concursul „Micul matematician”, Negreşti-Oaş (**S:E14.93**)

7. Se consideră segmentul [*AB*] de lungime *AB* = *n*, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi punctele M_1, M_2, …, N_n, respectiv mijloacele segmentelor [*AB*], $[AM_1]$ $[AM_{n-1}]$. Determinați *n*, ştiind că:

$$AB + AM_1 + AM_2 + ... + AM_n = 35840.$$

* * * (**S: E14.215**)

8. Punctele A, A_1, A_2, …, A_n aparțin, în această ordine, dreptei d. Ştiind că $AA_1 = 1$ cm, $AA_2 = 2$ cm, $AA_3 = 4$ cm, …, $AA_n = 1024$ cm, aflați numărul de puncte situate pe dreapta d.

* * * (**S:E14.219**)

9. Pe dreapta d se consideră punctele A_0, A_1, …, A_{50}, în această ordine, astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 5$ cm, …, $A_{49}A_{50} = 99$ cm. Fie O mijlocul segmentului $[A_0A_{50}]$.

a) Determinați $p \in \mathbb{N}$ pentru care $O \in [A_pA_{p+1}]$.

b) Există două numere naturale m şi n, $0 < m < n < 50$ astfel încât punctul O să fie mijlocul segmentului $[A_mA_n]$?

Ovidiu Bobb, Copalnic-Mănăştur (**S:E15.220**)

10. Fie segmentul AB şi punctele C, D, $E \in (AB)$ astfel încât $BC = \frac{AB}{5}$, $\frac{DC}{AD} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{DE}{AD} = \frac{2}{3}$. Arătați că:

a) punctul D este mijlocul lui (BE);

b) $[AE] \equiv [BC]$;

c) (ED) şi (AC) au acelaşi mijloc.

d) Dacă M este mijlocul lui (AB) şi $EM = 18$ cm, aflați lungimile segmentelor BC, CD, DE, AE şi AB.

Nicolae Ivăşchescu, Canada (**S:E15.298**)

11. Pe o dreaptă se consideră, în ordine, punctele A_0, A_1, A_2, … , A_n, … astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2 \cdot A_0A_1$, $A_2A_3 = 3 \cdot A_1A_2$, …, $A_{n-1}A_n = n \cdot A_{n-2}A_{n-1}$, … . Punctele interioare segmentelor A_0A_1, A_2A_3, A_4A_5, … se colorează cu roşu, iar punctele interioare segmentelor A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, … se colorează cu albastru. Dacă A este un punct situat pe dreapta dată, astfel încât $A_0A = 2016$, precizați dacă acesta este colorat cu roşu sau cu albastru.

Emil Ciolan, Slatina (**S:E16.20**)

Capitolul II
UNGHIURI

1. Fie $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente suplementare şi $[OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$. Arătați că perpendiculara în O pe OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$.

* * * (**S:E10.54**)

2. Se consideră un unghi $\sphericalangle AOB$ cu măsura de $110°15'$ şi semidreapta $(OC$ în interiorul său, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOC)$, iar semidreapta $(OD$ este opusă semidreptei $(OC$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BOD$.

Mariana Fleancu (**S:E10.294**)

3. Fie AB şi CD două drepte concurente în O. Construim $[OP$ bisectoarea $\sphericalangle AOC$, $[OT$ bisectoarea $\sphericalangle POB$ şi $[OR$ bisectoarea $\sphericalangle TOD$. Dacă $m(\sphericalangle POR) = 140°$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle AOD$.

Nicolae Stănică, Brăila (**S:E12.554**)

4. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$, unghiuri în jurul unui punct cu interioarele disjuncte, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = a \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle DOC) = b \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle DOA) = c \cdot m(\sphericalangle AOB)$. Numerele a, b, c verifică relațiile: $a \cdot b = 0{,}3$; $b \cdot c = 0{,}(3)$; $c \cdot a = 0{,}4$.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$.

b) Determinați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$ şi semidreapta opusă lui $[OB$.

Daniela Tilincă şi *Adriana Mihailă*, Brăila (**S:E12.559**)

5. Se consideră 359 de unghiuri cu măsurile $m_1, m_2, \ldots, m_{359}$. Ştiind că $m_1, m_2, \ldots, m_{359}$ sunt invers proporționale cu numerele $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, 359 \cdot 360$ şi că:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{359} = \frac{359}{360} \cdot 250°,$$

determinați unghiurile ale căror măsuri se exprimă prin numere naturale.

* * * (**S:E13.58**)

6. Fie $\sphericalangle AOD$ cu $m(\sphericalangle AOD) = 98°$ şi $(OB$, $(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ astfel încât $a \cdot m(\sphericalangle AOB) = c \cdot m(\sphericalangle BOC)$ şi $b \cdot m(\sphericalangle BOC) = c \cdot m(\sphericalangle COD)$, unde a, b, c sunt numere prime care verifică relația $3a + 5(3b + 7c) = 195$. Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$ şi $m(\sphericalangle COD)$.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila (**S:E14.11**)

7. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ şi $\sphericalangle EOA$ sunt direct proporționale cu cinci numere naturale consecutive, iar interioarele lor sunt disjuncte două câte două. Ştiind că $\dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD)} = \dfrac{2}{5}$, demonstrați că punctele A, O, D sunt coliniare.

Luca Tuță, Buzău (**S:E15.18**)

8. Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle AOB$, ştiind că raportul dintre complementul său şi suplementul său este egal cu cel mai mare număr raţional exprimat de fracţia $\dfrac{\overline{3x}}{\overline{abc}}$, unde $\overline{3x}$ este număr prim care divide $\overline{abc}$.

Veronica Ţucă, Alexandria (**S:E15.93**)

9. Fie semidreptele $(OA_1$, $(OA_2$, $(OA_3$, …, $(OA_{10}$, în această ordine, astfel încât unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$, …, $\sphericalangle A_9OA_{10}$ sunt suplementare şi au măsurile exprimate prin numere naturale consecutive. Să se calculeze:

a) măsurile unghiurilor;

b) $m(\sphericalangle MON)$, unde $(OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_3OA_4$, iar $(ON$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_9OA_{10}$.

Mirela-Adriana Matei, Turnu Măgurele (**S:E15.99**)

10. Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$, iar $[OM$ şi $[ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$. Se ştie că $m(\sphericalangle MOC) = p°$ şi $m(\sphericalangle AON) = q°$, unde p şi q sunt numere prime aparţinând mulţimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 2$ nu se divide cu $3\}$. Arătaţi că $[OB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$.

George-Florin Şerban, Brăila (**S:E15.152**)

11. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare şi $m(\sphericalangle AOB) = 150°$. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta AC şi punctul B se iau semidreptele $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle DOB) = 120°$, $[OE$ astfel încât $m(\sphericalangle EOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$ şi $[OF$ astfel încât $\sphericalangle FOD \equiv \sphericalangle EOC$. Calculaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle EOB$, $\sphericalangle DOC$ şi $\sphericalangle BOF$.

Nicolae Ivăşchescu, Canada (**S:E15.296**)

12. Măsurile a şi b a două unghiuri complementare sunt direct proporţionale cu numerele prime p şi q. Determinaţi a şi b ştiind că $\dfrac{a+b}{p+q}$ este număr prim.

* * * (**S:E16.136**)

Capitolul III
CONGRUENŢA TRIUNGHIURILOR

1. Arătaţi că două triunghiuri dreptunghice echivalente (au aceeaşi arie) sunt congruente dacă şi numai dacă au ipotenuzele congruente.

* * * (**S:E14.172**)

2. În exteriorul triunghiului oarecare ABC se construiesc triunghiurile ACP şi ABR, astfel încât $(CP) \equiv (BR)$ şi $(BP) \equiv (CR)$. Dacă $CP \cap BR = \{S\}$ demonstraţi că:

a) $PR \parallel CB$;

b) $ST \perp PR$, unde $\{T\} = BP \cap CR$.

Mihaela Baltă, Brăila (**S:E15.262**)

3. Fie punctul P interior triunghiului ABC, astfel încât triunghiurile ABP şi ACP sunt echivalente. Arătaţi că dreapta AP trece prin mijlocul lui $[BC]$.

* * * (**S:E16.183**)

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulţimi şi divizibilitate

1. (S:E08.72) $n = 5^y \cdot 11^x$ şi n are 15 divizori naturali $\Rightarrow (y+1)(x+1) = 15$ (1)

$m = 2^x \cdot 11^z$ şi m are 12 divizori naturali $\Rightarrow (x+1)(z+1) = 12$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow (x+1) \mid (12,15) \Rightarrow (x+1) \mid 3 \Rightarrow x+1 \in \{1,3\} \Rightarrow x \in \{0,2\}$.

Dacă $x = 0 \Rightarrow y = 14$ şi $m = 11^{11}$.

Dacă $x = 2 \Rightarrow y = 4$ şi $z = 3 \Rightarrow n = 5^4 \cdot 11^2$ şi $m = 2^2 \cdot 11^3$.

2. (S:E08.74) n şi n + 1 sunt numere consecutive, deci au parităţi diferite. Cum singurul număr prim par este 2, rezultă n = 2. Astfel, $a = 2^2 + 3^3 + 13^2 \Rightarrow a = 200 \Rightarrow a \,\vdots\, 100$.

3. (S:E08.78) Notăm x exponentul lui 2 şi y exponentul lui 5 în descompunerea în factori primi a lui A.

A conține: $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$ multipli de 2, $\left[\frac{100}{4}\right] = 25$ multipli de 2^2 şi $\left[\frac{100}{8}\right] = 12$ multipli de $2^3 \Rightarrow x \geq 50 + 25 + 12 \Rightarrow x \geq 87$. (1)

A conține: $\left[\frac{100}{5}\right] = 20$ multipli de 5, $\left[\frac{100}{25}\right] = 4$ multipli de 5^2 şi nu conține multipli de $5^3 = 125 \Rightarrow y = 20 + 4 \Rightarrow y = 24$ (2)

$B = 4^{41} \cdot 5^{27} \Rightarrow B = \left(2^2\right)^{41} \cdot 5^{27} \Rightarrow B = 2^{82} \cdot 5^{27}$ (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow (A,B) = 2^{82} \cdot 5^{24}$.

4. (S:E08.79) Fie a și b cele două numere, $a \geq b$, c și r câtul, respectiv restul împărțirii lui a la b. Din teorema împărțirii cu rest obținem: $a = bc + r, r < b \Rightarrow a = bc + r$ și cum $a - b = c \Rightarrow a = b + c \Rightarrow b + c = bc + r$.

Cum $0 \leq r \leq b - 1 \mid +bc \Rightarrow bc \leq bc + r \leq bc + b - 1 \Rightarrow bc \leq b + c \leq bc + b - 1$.

Din $bc \leq b + c \Rightarrow bc - b - c \leq 0 \Rightarrow bc - b - c + 1 \leq 1 \Rightarrow (b-1)(c-1) \leq 1$ și cum b și c sunt numere naturale, obținem situațiile:

I) $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$, iar relația $b + c \leq bc + b - 1$ devine $c \leq c - 1$, imposibil.

II) $c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow$ orice pereche de forma $(b, b+1), b \in \mathbb{N}^*$ este soluție a problemei.

III) $b - 1 = c - 1 = 1 \Rightarrow b = c = 2 \Rightarrow a = 4$, deci $a = 4$ și $b = 2$ reprezintă, de asemenea, o soluție a problemei.

5. (S:E08.111) $A = 2^{4004} \cdot 5^{4007} + 280 \Rightarrow A = 2^{4004} \cdot 5^{4004} \cdot 5^3 + 280 \Rightarrow A = 10^{4004} \cdot 125 + 280$

$\Rightarrow A = 125\underbrace{00...0}_{4004 \text{ zerouri}} + 280 \Rightarrow A = 125\underbrace{00...0}_{4001 \text{ zerouri}}280$

a) Primele 5 cifre ale lui A sunt 12500, iar ultimele 5 cifre ale lui A sunt 00280.

b) Ultima cifră a lui A este $0 \Rightarrow A \vdots 2$, $A \vdots 5$, $A \vdots 10$. Ultimele două cifre ale lui A sunt $80 \Rightarrow A \vdots 4$. Suma cifrelor lui A este $1+2+5+2+8=18 \Rightarrow A \vdots 3$, $A \vdots 9$.

c) $A \vdots 5$, dar, având ultimele două cifre 80, $A \not\vdots\, 5^2 \Rightarrow A$ nu este pătrat perfect.

6. (S:E08.112) $11a+6b=5c \,|+5b \Rightarrow 11a+11b=5b+5c \Rightarrow 11(a+b)=5(b+c)$ şi cum

$(11,5)=1 \Rightarrow 5\,|\,(a+b)$ (1)

şi $11\,|\,(b+c)$ (2)

a, b, c trei numere naturale $\Rightarrow$ cel puțin două dintre acestea au aceeaşi paritate (principiul cutiei) $\Rightarrow$ cel puțin una dintre sumele $a + b$, $b + c$ sau $c + a$ este număr par, deci este divizibil cu 2. (3)

Din (1), (2), (3) şi $(11,5,2)=1 \Rightarrow 11\cdot 5\cdot 2\,|\,(a+b)(b+c)(c+a)$ rezultă:

$110\,|\,(a+b)(b+c)(c+a)$.

7. (S:E08.113) a) Dacă $n=3k \Rightarrow 4n+3=12k+3=3(4k+1) \Rightarrow (4n+3) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$.

Dacă $n=3k+1 \Rightarrow 2n+1=6k+3=3(2k+1) \Rightarrow (2n+1) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$.

Dacă $n=3k+2 \Rightarrow 7n+1=21k+15=3(7k+5) \Rightarrow (7n+1) \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$.

Deci, $A \vdots 3$, pentru orice număr natural n.

b) Dacă $n=8k+1 \Rightarrow 7n+1=56k+8=8(7k+1) \Rightarrow (7n+1) \vdots 8 \Rightarrow A \vdots 8$ şi cum, din a) $A \vdots 3$, pentru orice număr natural n, iar $(3, 8) = 1 \Rightarrow A \vdots 24$, pentru orice număr natural n de forma $8k+1, k \in \mathbb{N}$.

8. (S:E08.122) *Soluția 1.* $n=36-[n,8]$ şi cum $4\,|\,n$ şi $4\,|\,[n,8] \Rightarrow 4\,|\,n \Rightarrow n=4m$, $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4m+[4m,8]=36 \Rightarrow 4m+4\cdot[m,2]=36\,|:4 \Rightarrow m+[m,2]=9$ (1)

Dacă m ar fi număr par, atunci $[m,2]$ ar fi număr par, deci membrul stâng al relației (1) ar fi par, iar membrul drept impar. Imposibil!

Deci m este număr impar $\Rightarrow [m,2]=2m$ şi relația (1) devine $m+2m=9 \Rightarrow 3m=9 \Rightarrow$ $\Rightarrow m=3 \Rightarrow n=12$.

Soluția 2. Cum $4\,|\,8 \Rightarrow 4\,|\,[n,8]$ şi, din relația $n+[n,8]=36$, rezultă imediat că $4\,|\,n \Rightarrow$ $\Rightarrow n=4k$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4k+[4k,8]=36 \Rightarrow 4k+4\cdot[k,2]=36\,|:4 \Rightarrow k+[k,2]=9$, de unde evident k este impar $\Rightarrow [k,2]=2k \Rightarrow k+2k=9 \Rightarrow 3k=9 \Rightarrow k=3 \Rightarrow n=12$.

9. (S:E08.158) Eliminând numerele pare şi pe cele care au ultima cifră 5, produsul devine $p=(1\cdot 3\cdot 7\cdot 9)\cdot(11\cdot 13\cdot 17\cdot 19)\cdot\ldots\cdot(1991\cdot 1993\cdot 1997\cdot 1999)\cdot(2001\cdot 2003\cdot 2007)$.

Există 1000 numere impare mai mici ca 2000, deci grupându-le câte 4 obținem 250 grupe. Fiecare dintre primele 250 paranteze are ultima cifră 9, iar ultima paranteză are ultima cifră 1, deci $u(p) = u(9^{250}) = 1$

10. (S:E08.169) $a=2009+2009^2+\ldots+2009^{2008} \Rightarrow a=(2008+1)+(2008+1)^2+\ldots+$ $+(2008+1)^{2008} \Rightarrow a=M_{2008}+1+M_{2008}+1^2+\ldots+M_{2008}+1^{2008} \Rightarrow a=M_{2008}+2008 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2008\,|\,a$.