MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Corectură: Anca Pascu, Bianca Vișan
Tehnoredactare: Mioara Benza
Design copertă: Ionuț Broștianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 9-a / coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Pitești : Cartea Românească Educațional, 2018
Index
ISBN 978-606-94581-8-1

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)

Marin Chirciu
Daniel Jinga
Vasile Gorgota
Octavian Stroe
Sorin Ulmeanu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a IX-a

(2011-2016)

CR
Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Partea a II-a. GEOMETRIE

Prefață

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan

Președintele Societății de Științe Matematice din România

PARTEA I

ALGEBRĂ

Capitolul I.1.
MULŢIMEA NUMERELOR REALE

I.1.1. NUMERE NATURALE. NUMERE ÎNTREGI. ECUAŢII. ECUAŢII DIOFANTICE

1. Determinaţi cel mai mic număr natural n care se divide cu 28, are suma cifrelor 28 şi are ultimele două cifre 28.

(S:L11.2.aprilie)

2. Matei şi Irina, elevi în clasa a IX-a, studiază la şcoală 15 discipline. La sfârşitul semestrului I obţin aceeaşi medie generală. Ştiind că au avut numai medii de 8, 9 şi 10, iar că numărul mediilor de 8 ale lui Matei este, respectiv, egal cu numărul mediilor de 8, 9 şi 10 ale Irinei, precizaţi câte medii de 10 a obţinut Irina.

(S:L11.4.aprilie)

3. Dintr-o revistă lipseşte o singură foaie. Dacă însumăm numerele reprezentând paginaţia de pe restul de pagini obţinem 199. Putem afla numărul total de pagini şi numărul paginii lipsă?

(S:L11.6.aprilie)

4. Trei numere naturale nenule a, b, c se numesc pseudopitagorice dacă:

$$a^{-2} = b^{-2} + c^{-2}.$$

Există 2011 astfel de triplete?

(S:L11.5.mai)

5. Demonstraţi că din 7 numere întregi se pot alege patru cu suma divizibilă cu 4. Rămâne adevărat rezultatul pentru 6 numere întregi?

(S:L11.1.iunie)

6. Arătaţi că $a^2 + b^2 + ab$ este pătrat perfect pentru cel puţin 2011 perechi de numere naturale (a, b).

(S:L11.4.iunie)

7. Demonstraţi că există pătrate perfecte cu 2011 cifre din care 3 sunt 0, dar ultima cifră este nenulă.

(S:L11.7.iunie)

8. Fie $a = 2011! + 2010! + \ldots + 3! + 2!$ şi $\overline{a_1a_2 \ldots a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă $s = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \overline{a_5a_6} + \ldots$ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre), arătaţi că a şi s nu sunt pătrate perfecte.

(S:L11.9.iunie)

9. Există numere naturale, care scrise în baza 10, au n cifre şi scrise în baza 2 au $2n$ cifre? Justificaţi răspunsul.

(S:L11.10.iunie)

10. Arătaţi că există numere naturale nenule n, pentru care numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{8n+1}$ este număr natural.

(S:L11.2.octombrie)

11. Demonstraţi că există intervale $[a, b]$ cu $b - a > 2011$ care conţin doar numere întregi compuse.

(S:L11.8.octombrie)

12. Dați un exemplu de 6 numere prime care sunt în progresie aritmetică.

(S:L11.8.noiembrie)

13. Este adevărată afirmația: *Produsul a două numere care se pot scrie ca suma a două numere naturale pătrate perfecte este un număr care se poate scrie ca suma a două numere naturale pătrate perfecte?* (Considerați o identitate algebrică.)

(S:L12.4.ianuarie)

14. În expresia $S = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm ... \pm \frac{1}{2012}$, se poate găsi o alegere de semne astfel încât S să fie număr întreg?

(S:L12.7.ianuarie)

15. Există un număr natural a cu 2012 cifre, toate nenule, astfel încât a se divide cu suma cifrelor sale?

(S:L12.8.ianuarie)

16. Există oare un număr cu 2012 cifre, format numai cu cifrele 1 sau 2, care se divide la 2^{2012}?

(S:L12.7.februarie)

17. Enumerați toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale şi pentru care $p = 6r$, unde p este semiperimetrul triunghiului şi r este raza cercului înscris în triunghi.

(S:L12.6.martie)

18. Arătați că, folosind monede de 5 lei şi de 3 lei, se poate plăti orice sumă număr întreg de lei mai mare sau egală cu 8.

(S:L12.7.martie)

19. Fie m şi n două numere întregi. Știind că ecuația: $x^2 - (m + n)x + mn + 2012 = 0$ are ambele soluții numere întregi, aflați toate valorile posibile pe care le poate lua $|m - n|$.

Ramona Tudoran, Arad **(S:L12.1.aprilie)**

20. Se dă un pătrat perfect cu cifra unităților 9 şi cifra zecilor 0. Arătați că cifra sutelor este pară. Determinați cele mai mici două pătrate perfecte care se termină cu cifrele $\overline{209}$.

(S:L12.9.aprilie)

21. Există numere naturale nenule n astfel încât, pentru orice număr prim p pentru care $p - 1$ divide n, p divide n?

(S:L12.8.septembrie)

22. Găsiți numerele naturale n pentru care $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{33...3}$.

(S:L12.10.septembrie)

23. Determinați numerele întregi z pentru care numărul $z^3 + 2z^2 + 3z + 2$ este întreg.

Alin Munteanu, Sibiu **(S:L12.1.decembrie)**

24. Fie $b = 2c$, $c \in \mathbb{N}^*$, o bază de numerație. Arătați că:

$$x = \overline{\underbrace{(b-1)(b-1)...(b-1)}_{n \text{ ori}}}^{2}_{(b)} + \overline{(c-1)\underbrace{(b-1)(b-1)...(b-1)}_{n-1 \text{ ori}}\underbrace{0...0}_{n \text{ ori}}}^{2}_{(b)}$$

este pătrat perfect.

Mugur Acu, Sibiu **(S:L12.9.decembrie)**

25. Arătați că $(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n + 1)$ nu poate fi pătrat perfect pentru nicio valoare $n \in \mathbb{N}^*$.

(S:L13.3)

26. Pot fi trei cuburi perfecte în progresie aritmetică?

(S:L13.4)

27. Demonstrați că nu există patru numere consecutive, mai mari decât 10, care să aibă toți factorii primi de o singură cifră.

Traian Preda, București **(S:L13.7)**

28. Există numere naturale n nenule, pentru care $n^2 + 18n$ este pătrat perfect?

(S:L13.47)

29. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale x, y, astfel încât $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{n^2}$.

(S:L13.48)

30. Aflați toate numerele naturale nenule care pot fi scrise ca suma a cel puțin două numere naturale consecutive.

(S:L13.49)

31. Care este cel mai mic număr natural n pentru care ultimele trei cifre ale numărului 2013^n sunt aceleaşi?

(S:L13.50)

32. Fie p, q numere prime distincte şi a număr natural ce nu se divide cu pq, astfel încât pq divide numerele $a^{p-1} - 1$ şi $a^{q-1} - 1$. Arătați că pq divide $a^{pq-1} - 1$.

George Stoica, Canada **(S:L13.85)**

33. Poate fi numărul $2^n + 3^n$ pătrat perfect pentru vreo valoare $n \in \mathbb{N}$?

(S:L13.87)

34. Găsiți 13 numere consecutive neprime cu 2310. Arătați că, date fiind 14 numere consecutive, cel puțin unul este neprim cu 2310.

(S:L13.88)

35. Aflați ultimele trei cifre ale numărului $19^{70} - 18^{70}$.

Cristina Ştefan, București **(S:L13.90)**

36. Se consideră numerele întregi a, b, c astfel încât $ab + bc + ca \neq 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2$ este pătrat perfect. Arătați că există $m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

Lucian Petrescu, Tulcea **(S:L13.165)**

37. Există numere naturale a_n, $n=\overline{1,2013}$, astfel încât numerele a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{2012}a_{2013}$, $a_{2013}a_1$ (în această ordine) să formeze o progresie aritmetică neconstantă? Ce se întâmplă dacă înlocuim 2013 cu 2012?

(S:L13.170)

38. În câte moduri poate fi scris numărul 2014 ca suma unor numere naturale consecutive?

(S:L13.203)

PARTEA a II-a

GEOMETRIE

Capitolul II.1.

CALCUL VECTORIAL ÎN GEOMETRIA PLANĂ

1. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$ ale triunghiului ABC alegem punctele M, N, respectiv P, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA}$. Arătați că suma lungimilor cevienelor AN, BP, CM este strict mai mică decât perimetrul triunghiului.

Steluța Monea şi *Mihai Monea*, Deva **(S:L11.7.decembrie)**

2. Se consideră pătratul $ABCD$ şi M un punct pe latura (BC). Se notează cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor MAB, MAD, respectiv MDC. Arătați că $G_1G_2 \perp$ $\perp G_2G_3$.

Marius Burtea, Alexandria **(S:L12.2.februarie)**

3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in$ $\in (CD)$, $Q \in (AD)$, astfel încât $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \vec{0}$. Demonstrați că dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci şi patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Marius Burtea, Alexandria **(S:L12.4.februarie)**

4. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), M mijlocul laturii BC şi $N \in (AB)$ astfel încât $\frac{AN}{AB} = x$, $x \in \mathbb{R}$, $m(\sphericalangle ABC) = 30°$. Aflați x ştiind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt perpendiculari.

Vasile Ienuțaş, Baia Mare **(S:L12.4.martie)**

5. Cu notațiile obişnuite, arătați că în orice triunghi ABC avem:

$$3(a + b + c)\overrightarrow{GI} + (4a + b + c)\overrightarrow{IA} + (a + 4b + c)\overrightarrow{IB} + (a + b + 4c)\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat **(S:L12.10.martie)**

6. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încât: $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

a) Dacă A' este mijlocul laturii BC, arătați că punctele A, M, A' sunt coliniare.

b) Dacă B' este punctul de intersecție al dreptelor BM şi AC, iar C' este punctul de intersecție al dreptelor CM şi AB, arătați că $B'C'$ este paralelă cu BC.

V. Stănescu **(S:L12.2.octombrie)**

7. Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie Q, M puncte în planul său astfel încât $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QD}$ şi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AD}$ şi $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Dacă P este punctul de intersecție al dreptelor AB şi QM, demonstrați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.

Silvia Muşătoiu, Bucureşti **(S:L12.10.noiembrie)**

8. Determinați punctul M, din planul triunghiului ABC, astfel încât $\overrightarrow{MA} + a \cdot \overrightarrow{MB} +$ $+ (a-1)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, unde a este o constantă dată.

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:L13.8)**

9. Determinați poziția punctului M din planul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ știind că vectorii $\overrightarrow{MA_1}+2\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}$ și $\overrightarrow{A_1A_3}$ sunt coliniari, iar $\left|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right|=\left|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_3}\right|$.

Călin Poştaru, Timişoara **(S:L13.121)**

10. Fie ABC un triunghi şi M un punct în planul său. Dacă A', B', C' sunt simetricele lui M față de BC, AC, respectiv BA, demonstrați că $AA' = BB' = CC'$ implică faptul că M este ortocentrul triunghiului.

Nicolae Stăniloiu, Anina **(S:L13.169)**

11. Fie $ABCD$ un patrulater care nu este paralelogram şi punctele M, N, P, Q pe semidreptele $(DA$, $(AB$, $(BC$, respectiv $(CD$, astfel încât să avem

$$\frac{DM}{DA}=\frac{AN}{AB}=\frac{BP}{BC}=\frac{CQ}{CD}=\alpha,$$

cu $\alpha \in (0, +\infty)$. Arătați că:

a) $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\alpha = \frac{1}{2}$;

b) mijloacele segmentelor (MN), (AB), (DC), (PQ) sunt vârfurile unui paralelogram pentru orice valoare a lui α.

Teodor Trişcă şi *Daniela Vicol*, Botoşani **(S:L13.246)**

12. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex iar M, N, P, Q, respectiv, punctele de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele $ABCD$, $ABDE$, $ABEF$, $ABFC$. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Traian Tămîian, Carei **(S:L13.282)**

13. Fie un cerc de centru O în care s-a inscris patrulaterul $ABCD$. Fie G_1 şi G_2, respectiv, centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi ACD, apoi H_1 şi H_2 ortocentrele ΔABC şi ΔACD. Fie $x = CD\cdot(AC\cdot AD - BD\cdot BC)$ şi $y = AB\cdot(AD\cdot BD - AC\cdot BC)$. Calculați $x\cdot\left(\overrightarrow{OG_1}+\frac{\overrightarrow{OH_2}}{3}\right)-y\left(\overrightarrow{OG_2}+\frac{\overrightarrow{OH_1}}{3}\right)$.

Carmen Botea, Brăila **(S:L13.324)**

14. Fie ΔABC, D mijlocul laturii (BC), E mijlocul laturii (AC), F mijlocul laturii (AB), iar G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BFD, AFE, respectiv DEC şi G centrul de greutate al ΔABC. Calculați:

a) $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}$.

b) Deduceți că G este centrul de greutate al $\Delta G_1G_2G_3$.

Viorel Botea, Brăila **(S:L13.326)**

15. În ΔABC ascuțitunghic, H este ortocentrul, iar A_1, B_1, C_1 simetricele lui H față de mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$. Arătați că, dacă triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC au acelaşi centru de greutate, atunci ΔABC este echilateral.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila **(S:L13.327)**

16. Fie triunghiul ABC şi punctul D mijlocul laturii BC. Dacă punctele X, Y şi M sunt situate pe segmentele AB, AC, respectiv AD, astfel încât patrulaterul $DYMX$ să fie paralelogram, arătați că dreptele XY şi BC sunt paralele.

Romanița Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:L14.43)**

17. În planul axelor de coordonate carteziene considerăm punctele $A(-1,\ 5)$, $B(-7, -1)$, $C(5, 2)$. Câte puncte M de coordonate întregi verifică relația

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=30\ ?$$

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:L14.44)**

18. Fie ABC un triunghi şi AM, BN, CP trei ceviene concurente în punctul X. Dacă $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$, determinați vectorul $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XN}+\overrightarrow{XP}$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L14.45)**

19. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O punctul de intersecție al diagonalelor, iar G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, respectiv BCD. Dacă $\overrightarrow{G_1O}=\overrightarrow{OG_2}$, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

Romanița Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:L14.82)**

20. Într-un triunghi ABC fie D, E, F respectiv punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC, AC, AB. Arătați că dacă $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DC}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gheorghe Alexe, Piteşti **(S:L14.87)**

21. Octogonul regulat $ABCDEFGH$ este înscris în cercul de rază 3. Se consideră punctul M aflat la distanța 1 față de centrul cercului. Calculați suma pătratelor distanțelor de la punctul M la vârfurile octogonului.

Ruxandra Murea, Brăila **(S:L14.204)**

22. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $P \in (MN)$, astfel încât $\dfrac{BN}{BC}+2\dfrac{AM}{AD}=2$ şi $\dfrac{NP}{PM}=2$. Arătați că punctele B, P şi D sunt coliniare.

(S:L14.207)

23. Dexter pune câte o săgeată pe fiecare muchie a unei prisme hexagonale regulate definind, astfel, nişte vectori (fiecare muchie devenind vector). El adună toți cei 18 vectori rezultați. Câte rezultate diferite poate obține Dexter pe această cale (făcând toate alegerile posibile)? Dar în cazul unei prisme cu baza poligon regulat cu $2n$ laturi ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$).

Cecilia Deaconescu, Piteşti **(S:L14.241)**

24. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA}+(c+a)\overrightarrow{PB}+(a+b)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$, unde $P \in \{O, I, G\}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral. (Notațiile sunt cele uzuale).

Daniel Jinga, Piteşti **(S:L14.245)**

25. Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte pe laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ascuțitunghic ABC, astfel încât $\overrightarrow{AB_1}+k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1}=k\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{CA_1}=k\overrightarrow{CB}$, $k \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. În planul triunghiului ABC ridicăm perpendicularele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 pe BC, CA, respectiv AB, în exteriorul triunghiului, astfel încât $A_1A_2 = BC$, $B_1B_2 = AC$, $C_1C_2 = AB$. Demonstrați că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate.

Adriana Moraru, Piteşti **(S:L14.248)**

26. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu măsura unghiului c de 30°. Dacă $[AD]$ este înălțimea din A, I centrul cercului înscris iar T este mijlocul segmentului $[BI]$, arătați că $(AT$ este bisectoarea unghiului BAD.

Neculai Stanciu, Buzău şi *Titu Zvoranu*, Comăneşti **(S:L14.284)**

27. Considerăm patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi fie H, respectiv H', ortocentrele triunghiurilor ABD şi ABC, iar G, respectiv G', centrele de greutate ale triunghiurilor HAD şi $H'BC$. Arătați că dacă $3GG' = AB + 2CD$, atunci $AC = BD$.

Petru Tudor, Sebeş **(S:L14.285)**

28. Considerăm paralelogramul $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = c$, $BD = b$ şi fie $M \in (BC)$ astfel încât $2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = 0$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABD, I este centrul cercului înscris în triunghiul BCD, iar punctele G, I, M sunt coliniare, arătați că $4a = 2b + 5c$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L15.6)**

29. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, $R \in (MN)$, $S \in$ $\in (NP)$, astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{MR} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NS} =$ $= (1-\lambda)\overrightarrow{NP}$, cu $\lambda \in (0, 1)$. Dreapta RS intersectează laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC în punctele E, respectiv F. Demonstrați că $[ER] \equiv [SF]$.

Marian Teler, Costeşti **(S:L15.124)**

30. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, înscris în cercul de centru O, cu ortocentrul H şi cu înălțimile $[AD]$, $[BE]$ şi $[CF]$. Considerăm punctul $\{M\} = BH \cap FD$ şi construim $MR \parallel AD$, cu $R \in AB$. Notăm $RE \cap AD = \{Q\}$. Arătați că $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{AQ}$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L15.125)**

31. Fie tetraedrul $VABC$. Pe muchiile (VA), (VB), (VC) considerăm punctele M, N şi P astfel încât $AM = BN = CP$. Notăm cu G şi G^* centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi MNP. Dacă punctele X, Y şi Z sunt picioarele bisectoarelor unghiurilor AVB, BVC, respectiv CVA, arătați că:

a) AY, BZ şi CX sunt concurente, într-un punct J;

b) $GG^* \parallel VJ$.

Petru Braica, Satu Mare **(S:L15.126)**

32. Fie dreptunghiul $ABCD$ $(AB > BC)$, $(BB'$ bisectoarea unghiului ABC, $B' \in AD$, $(DP$ bisectoarea unghiului CDB', $P \in (BB')$, $CP \cap AD = \{R\}$, $AP \cap DC = \{Q\}$, $BB' \cap$ $\cap DC = \{S\}$, $RQ \cap AB = \{T\}$. Dacă $TS \parallel AP$, arătați că $L^3 = l^3 + 2L^2l$, unde $AB = L$ şi $BC = l$.

Daniela Stănică şi *Nicolae Stănică*, Brăila **(S:L15.245)**

33. Se consideră pătratul $ABCD$ şi un punct E pe diagonala BD. Fie P centrul cercului circumscris triunghiului ADE şi S ortocentrul triunghiului AEB. Dacă O este simetricul punctului P față de AE, demonstrați că

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OS}.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L15.287)**

34. Fie triunghiul ABC de ortocentru H şi A_1, B_1, C_1 simetricele lui H față de mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Notăm cu H_a, H_b, H_c ortocentrele triunghiurilor A_1BC, AB_1C, respectiv ABC_1. Arătați că dreptele AH_a, BH_b şi CH_c sunt concurente în centrul de greutate G al triunghiului ABC.

Marius Perianu, Slatina **(S:L15.330)**

35. Fie *ABC* un triunghi cu centrul cercului circumscris *O*. Bisectoarea unghiului *A* taie cercul circumscris în *M*. Prin *O* se duce $OE \parallel BM$, $E \in AB$ şi $OF \parallel MC$, $F \in AC$. Perpendiculara din *A* pe *BC* taie cercul circumscris triunghiului *AEF* în *S* şi cercul circumscris triunghiului *ABC* în *N*. Arătaţi că

$$\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L16.5)**

36. Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se iau punctele *M*, respectiv *N*, care le împart în rapoartele *p* respectiv *q*. Fie triunghiul echilateral *ACD*, cu *D* şi *B* în semiplane opuse faţă de *AC*. Care este raportul în care *MN* împarte *AD*?

G. Rene, Bucureşti **(S:L16.7)**

37. În patrulaterul *ABCD*, fie *O* intersecţia diagonalelor, iar *M*, *P*, *Q* pe (*BD*), (*AB*), respectiv (*DC*), astfel încât $\frac{BM}{MD} = 4$, $\frac{AP}{PB} = 3$, $\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{OQ}$ şi $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari, arătaţi că *ABCD* este paralelogram.

Romaniţa Ghiţă şi *Ioan Ghiţă*, Blaj **(S:L16.10)**

38. Demonstraţi că lungimile laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică neconstantă, dacă şi numai dacă dreapta care trece prin centrul de greutate şi centrul cercului înscris este paralelă cu una din laturi.

Vlad Copil şi *Petre Simion*, Bucureşti **(S:L16.41)**

39. Tangentele în *A* şi *B* la cercul circumscris triunghiului isoscel *ABC*, cu $AC > AB = BC$, se intersectează în *P* iar mediatoarea lui [*BC*] taie *BC* în *M* şi *AC* în *N*. Demonstraţi că $\left| \overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{BN} \right| = 3MN$.

(S:L16.89)

40. (Dreapta lui Euler) Fie *ABC* un triunghi oarecare, *H* ortocentrul său, *O* centrul cercului său circumscris, *G* centrul său de greutate şi A' punctul diametral opus punctului *A* pe cercul circumscris triunghiului *ABC*. Arătaţi că:

a) patrulaterul $BA'CH$ este un paralelogram;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

c) punctele *O*, *G*, *H* sunt coliniare şi $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$.

(S:L16.208)

41. Fie *ABC* un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul *H* şi centrul cercului circumscris *O*. Notăm *X*, *Y*, *Z* centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *HBC*, *HCA*, respectiv *HAB*. Demonstraţi că $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{OH}$.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:L16.242)**

42. Se consideră triunghiul *ABC* şi punctele *M*, *N*, *P* pe laturile *BC*, *AC*, respectiv *AB*. Arătaţi că $\frac{MA^2}{MB \cdot MC} + \frac{NB^2}{NA \cdot NC} + \frac{PC^2}{PA \cdot PB} \geq 9.$

Filip Munteanu, elev, Aiud **(S:L16.244)**

43. Patrulaterul *ABCD* este înscris într-un cerc de centru *O*, iar $x \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, $x \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$, $x \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$, $x \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ sunt vectori de aceeaşi lungime, unde *x* este un număr real diferit de – 1. Arătaţi că patrulaterul *ABCD* este dreptunghi.

Adrian Boţan, Botoşani **(S:L16.288)**

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

PARTEA I. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I.1. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

I.1.1. NUMERE NATURALE. NUMERE ÎNTREGI. ECUAŢII. ECUAŢII DIOFANTICE

1. (S:L11.2.aprilie) Numărul 18928 probează condițiile problemei.
2. (S:L11.4.aprilie) Fie x = numărul mediilor de 8 ale lui Matei. Rezultă că x = numărul mediilor de 8 ale Irinei = numărul mediilor de 9 ale Irinei = numărul mediilor de 10 ale Irinei. Din $x + x + x = 15$ deducem că $x = 5$. Deci Irina are 5 medii de 10.
3. (S:L11.6.aprilie) Fie n numărul de pagini ale revistei, iar x şi $x + 1$ numărul paginilor foii lipsă. Avem $1 + 2 + 3 + \ldots + n - x - (x + 1) = 199$. Deducem $\frac{n(n+1)}{2} =$ $= 200 + 2x \Leftrightarrow n(n + 1) = 400 + 4x$. Deducem $n = 20$ şi $x = 5$. Rezultă că revista are 20 de pagini şi lipseşte foaia cu paginile 5 şi 6.
4. (S:L11.5.mai) Fie x, y, z trei numere naturale nenule pitagorice, adică $x^2 = y^2 + z^2$; Există o infinitate de triplete pitagorice: $x = 2k^2 + 2k + 1$, $y = 2k + 1$, $z = 2k^2 + 2k$, $k \in$ $\in \mathbb{N}^*$. Luăm $a = yz$, $b = xy$, $c = xz$ şi obținem $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Deducem că există o infinitate de numere naturale nenule a, b, c pseudopitagorice; $a = (2k + 1)(2k^2 + 2k)$, $b = (2k^2 + 2k + 1)(2k + 1)$, $c = (2k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 2k)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

5. (S:L11.1.iunie) Împărțim cele 7 numere întregi în 4 grupe în funcție de restul împărțirii la 4. R_k: mulțimea elementelor care împărțite la 4 dau restul k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (adică $x \in R_k \Leftrightarrow x \equiv k \pmod 4$). Avem cazurile: • Există o calsă de resturi cu cel puțin 4 elemente. Dacă avem card $R_k \geq 4$, putem alege $a, b, c, d \in R_k$ şi evident $S =$ $= a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. • card $R_k \leq 3$, $\forall\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deoarece $a + b + c +$ $+ d \equiv (a + x) + (b + x) + (c + x) + (d + x) \pmod 4$. Conform principiului lui Dirichlet există $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ astfel încât card $R_k \geq 2$ de unde card $R_k \in \{2, 3\}$. Modificând cele 7 numere adunând pe fiecare număr cu $x = 4 - k$, putem considera $k =$ $= 0$, adică avem card $R_0 \in \{2, 3\}$. • Dacă $R_1 \neq \varnothing$ şi $R_3 \neq \varnothing$ putem alege $a, b \in R_0$ şi $c \in R_1$, $d \in R_3$ şi avem $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. • Dacă $R_3 = \varnothing$, avem card $(R_1 \cup$ $\cup R_2) \geq 4$, rezultă $R_1 \neq \varnothing$, $R_2 \neq \varnothing$. În cazul card $R_2 \geq 2$, alegem $a, b \in R_0$ şi $c, d \in R_2$ şi rezultă $S = a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. În cazul card $R_2 = 1$ rezultă card $R_1 \geq 2$, alegem $a \in R_0$, $b, c \in R_1$ şi $d \in R_2$ şi rezultă $S = a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. Analog procedăm şi în cazul $R_1 = \varnothing$. Proprietatea nu rămâne adevărată în cazul a 6 numere întregi, cum reiese din exemplul $\{4, 5, 8, 9, 12, 13\}$.

6. (S:L11.4.iunie) $a = 3k$, $b = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ verifică condiția din enunț: $a^2 + b^2 + ab =$ $= (3k)^2 + (5k)^2 + 3k \cdot 5k = (7k)^2$. Cum mulțimea $\mathbb{N}$ este infinită rezultă că există o infinitate de perechi (a, b), $a = 3k$, $b = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea din enunț.

7. (S:L11.7.iunie) Dacă $N = 2\underbrace{33...3}_{n\text{ cifre}}003$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ constatăm că

$N^2 = 5\underbrace{44...4}_{n-1\text{ cifre}}2902003\underbrace{88...8}_{n-2\text{ cifre}}998009$. Observând că N^2 conține $2n + 7$ cifre, are exact trei cifre 0 şi ultima cifră este nenulă, pentru $n = 1002$, N^2 este un exemplu ce verifică condițiile date. Avem că $N = 2 \cdot 10^{n+3} + \frac{10^n - 1}{3} \cdot 10^3 + 3 = \frac{7 \cdot 10^{n+3} - 991}{3}$, rezultă că $N^2 =$

$= \frac{49 \cdot 10^{2n+6} - 13874 \cdot 10^{n+3} + 982081}{9}$ (1). Pentru a justifica exemplul dat, avem

$= 5\underbrace{44...4}_{n-1\text{ cifre}}2902003\underbrace{88...8}_{n-2\text{ cifre}}998009 = 5 \cdot 10^{2n+6} + 4 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} \cdot 10^{n+7} + 2902 \cdot 10^{n+3} + 8 \cdot \frac{10^{n-3} - 1}{9} \cdot$

$\cdot 10^6 + 998009 = \frac{49 \cdot 10^{2n+6} - 4 \cdot 10^{n+7} + 26118 \cdot 10^{n+3} + 8 \cdot 10^{n+3} - 8 \cdot 10^6 + 998009 \cdot 9}{9} =$

$= \frac{49 \cdot 10^{2n+6} - 13874 \cdot 10^{n+3} + 982081}{9}$. Conform (1) verificarea este completă.

8. (S:L11.9.iunie) Restul împărțirii lui a la 3 este egal cu restul împărțirii la 3 a sumei $a_1 + a_2 + ... + a_p$. Cum $k! \equiv 2 \pmod 3$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ rezultă că a are forma $a = 3m +$ $+ 2$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $a_1 + a_2 + ... + a_p = 3q + 2$, unde $q \in \mathbb{N}^*$. Deoarece restul împărțirii la 3 a unui pătrat perfect este 0 sau 1, rezultă că a nu poate fi pătrat perfect. Observăm că $s = 10(a_1 + a_3 + ...) + a_2 + a_4 + ... = 3u + a_1 + a_2 + ... + a_p = 3M + 2$. Prin urmare, s nu poate fi pătrat perfect. <u>Obs.</u> Ultima cifră a lui a este 2, rezultă că a nu poate fi pătrat perfect. Această justificare nu sprijină şi proprietatea că s nu poate fi pătrat perfect.

9. (S:L11.10.iunie) Dacă $a \in \mathbb{N}$ îndeplineşte condiția pentru $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă relațiile

$10^{n-1} \leq a < 10^n$ şi $2^{2n-1} \leq a < 2^{2n}$. Cum $10^{n-1} \geq 2^{2n} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^n \geq 10$ este adevărată pentru

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, rezultă că proprietatea poate avea loc în cazul $n \in \{1, 2\}$. Cum $3 = 2 + 1 =$ $= 11_{(2)}$ şi $11 = 2^3 + 2 + 1 = 1011_{(2)}$, rezultă că în cazul $n \in \{1, 2\}$ răspunsul este afirmativ, iar pentru $n \geq 3$, răspunsul este negativ.

10. (S:L11.2.octombrie) $n = 3, 15, 120$ verifică condiția din enunț.

$$\begin{cases} n + 1 = k^2 \\ 8(k^2 - 1) + 1 = p^2 \Leftrightarrow 8k^2 - p^2 = 7 \end{cases}$$

11. (S:L11.8.octombrie) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, notăm cu $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (se citeşte n factorial, convențional avem $0! = 1! = 1$). Cum toate numerele naturale de forma $2013! + 2$, $2013! + 3$, …, $2013! + 2013$ sunt numere întregi compuse; alegem ca exemplu intervalul $[2013! + 2; 2013! + 2013]$ care are lungimea $2012 > 2011$.

12. (S:L11.8.noiembrie) Numerele 7, 37, 67, 97, 127, 157 sunt în progresie aritmetică având rația 30.

13. (S:L12.4.ianuarie) Fie $x = a^2 + b^2$ şi $y = c^2 + d^2$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.