

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU  
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU  
CRISTINA - PAULA MARIN

# ALGEBRĂ

pentru elevii claselor

## XI - XII

Subiecte pregătitoare pentru  
**EXAMENUL DE BACALAUREAT**  
și concursul de admitere  
în învățământul superior

**SINTEZE DE TEORIE**  
**EXERCIȚII ȘI PROBLEME**

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă



# CUPRINS

	E*	R**
<b>Capitolul I. PERMUTĂRI</b>		
Permutări. Inversiunile unei permutări. Transpoziții		
Breviar de teorie .....	3	
Probleme propuse .....	9	229
Teste de evaluare .....	13	232
<b>Capitolul II. MATRICE</b>		
1. Noțiunea de matrice. Transpusa unei matrice. Adunarea matricelor.		
Înmulțirea unei matrice cu un scalar		
Breviar de teorie .....	14	
Probleme propuse .....	20	232
2. Înmulțirea a două matrice. Ridicarea matricelor la puterea $n$		
Breviar de teorie .....	24	
Probleme propuse .....	30	235
Teste de evaluare .....	39	244
<b>Capitolul III. DETERMINANȚI</b>		
1. Calculul determinanților		
Breviar de teorie .....	41	
Probleme propuse .....	47	245
2. Proprietățile determinanților		
Breviar de teorie .....	50	
Probleme propuse .....	54	246
3. Aplicații ale determinanților în geometria în plan		
Breviar de teorie .....	64	
Probleme propuse .....	68	253
Teste de evaluare .....	71	256
<b>Capitolul IV. INVERSA UNEI MATRICE PĂTRATICE</b>		
Breviar de teorie .....	73	
Probleme propuse .....	78	258
Teste de evaluare .....	83	260
<b>Capitolul V. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE</b>		
1. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metoda lui Cramer.		
Metoda matriceală. Metoda lui Gauss		
Breviar de teorie .....	85	
Probleme propuse .....	88	261
2. Rangul unei matrice		
Breviar de teorie .....	91	
Probleme propuse .....	94	262
3. Sisteme de ecuații liniare. Studiul compatibilității acestora		
Breviar de teorie .....	97	
Probleme propuse .....	107	263
Teste de evaluare .....	113	266

\* E - enunțuri

\*\* R - răspunsuri, rezolvări

**Capitolul VI. LEGI DE COMPOZIȚIE**

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă		
Breviar de teorie .....	116	
Probleme propuse .....	119	269
2. Proprietăți ale legilor de compoziție interne		
Breviar de teorie .....	124	
Probleme propuse .....	128	272
Teste de evaluare .....	134	276

**Capitolul VII. GRUPURI**

1. Monoizi. Grupuri		
Breviar de teorie .....	136	
Probleme propuse .....	140	277
2. Grupuri finite. Subgrupuri. Ordinul unui grup finit. Ordinul unui element		
Breviar de teorie .....	146	
Probleme propuse .....	150	282
3. Morfisme de grupuri. Izomorfisme de grupuri		
Breviar de teorie .....	155	
Probleme propuse .....	159	285
Teste de evaluare .....	165	289

**Capitolul VIII. INELE ȘI CORPURI**

1. Inele		
Breviar de teorie .....	168	
Probleme propuse .....	175	291
2. Corpuri		
Breviar de teorie .....	179	
Probleme propuse .....	183	295
Teste de evaluare .....	186	298

**Capitolul IX. POLINOAME**

1. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Operații cu polinoame.		
Teorema împărțirii cu rest		
Breviar de teorie .....	187	
Probleme propuse .....	192	300
2. Divizibilitatea polinoamelor. Rădăcini multiple. Descompunerea polinoamelor.		
Cel mai mare divizor comun al unor polinoame. Cel mai mic multiplu comun al unor polinoame		
Breviar de teorie .....	196	
Probleme propuse .....	205	303
3. Relațiile lui François Viète. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbf{Z}$ , $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{R}$ , $\mathbf{C}$		
Ecuații bipătrate. Ecuații reciproce		
Breviar de teorie .....	209	
Probleme propuse .....	222	306
Teste de evaluare .....	226	313

Promotorii ai matematicii .....	315
---------------------------------	-----

Bibliografie selectivă .....	318
------------------------------	-----

## Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

## Noțiuni introductive

- Fie mulțimea finită  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . O funcție bijectivă  $\sigma : A \rightarrow A$ , se numește *permutare* de ordin  $n$ , unde  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .
- Mulțimea tuturor permutărilor de ordin  $n$  se notează cu  $S_n$ , iar card  $S_n = n!$ .
- Orice permutare de ordinul  $n$ , se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

- Permutarea  $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$  se numește *permutare identică* de ordin  $n$  (se mai notează și simplu cu  $e$ ).
- *Exemple:*

$$1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3, \text{ unde } \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1.$$

$$2) \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4, \text{ unde } \tau(1) = 4, \tau(2) = 3, \tau(3) = 2, \tau(4) = 1.$$

$$3) e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5.$$

## Compunerea permutărilor

*Definiție.* Considerăm permutările:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  și

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}, \sigma, \tau \in S_n. \text{ Atunci permutarea}$$

*Rezolvare.*

Aplicăm definiția inversiunii într-o permutare:

$$1 < 2 \Rightarrow 3 > 2, \quad 2 < 4 \Rightarrow 2 \not> 5,$$

$$1 < 3 \Rightarrow 3 > 1, \quad 2 < 5 \Rightarrow 2 \not> 4,$$

$$1 < 4 \Rightarrow 3 \not> 5, \quad 3 < 4 \Rightarrow 1 \not> 5,$$

$$1 < 5 \Rightarrow 3 \not> 4, \quad 3 < 5 \Rightarrow 1 \not> 4,$$

$$2 < 3 \Rightarrow 2 > 1, \quad 4 < 5 \Rightarrow 5 > 4.$$

Inversiunile sunt  $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 4)$ , deci  $m(\sigma) = 4$ .

Atunci  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^4 = 1$ , deci permutarea  $\sigma$  este pară.

### Transpoziții

Permutarea de ordin  $n$ , notată  $\tau_{ij}$  și definită prin

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \text{ se numește } \textit{transpoziție} (\tau_{ij} \text{ permută}$$

numai elementele  $i$  și  $j$  din linia a doua a tabloului, restul elementelor rămânând neschimbate).

*Observații:*

1) Orice transpoziție este o permutare impară.

2)  $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$  și  $\tau_{ij}^2 = e_n$ .

### Probleme rezolvate

---

1. Fie permutările  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Determinați permutările  $\alpha^{-1}$  și  $\beta^{-1}$ .

b) Rezolvați ecuațiile  $x \circ \alpha = \beta$  și  $\beta \circ y = \alpha$ , în  $S_3$ .

*Rezolvare.*

a)  $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

b)  $x \circ \alpha = \beta$ . Se compune cu  $\alpha^{-1}$ , la dreapta ecuației:

$$x = \beta \circ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\beta \circ y = \alpha$ . Se compune cu  $\beta^{-1}$ , la stânga ecuației:

$$y = \beta^{-1} \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Fie permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ . Să se calculeze:

a)  $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ .

b)  $\sigma^{2012}$ .

*Rezolvare*

$$a) \sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

$$b) \sigma^{2012} = \sigma^{2008+4} = \sigma^{2008} \circ \sigma^4 = (\sigma^4)^{502} \circ \sigma^4 = e^{502} \circ \sigma^4 = e \circ \sigma^4 = \sigma^4 = e.$$

3. Fie permutarea  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării  $\sigma$ .

b) Să se arate că ecuația  $x^2 = \sigma$  nu are soluții în  $S_4$ .

*Rezolvare.*

a) Aplicăm definiția inversiunii în permutarea  $\sigma$ :

$$1 < 2 \Rightarrow 4 > 3, \quad 2 < 3 \Rightarrow 3 > 1,$$

$$1 < 3 \Rightarrow 4 > 1, \quad 2 < 4 \Rightarrow 3 > 2,$$

$$1 < 4 \Rightarrow 4 > 2, \quad 3 < 4 \Rightarrow 1 \not> 2.$$

Inversiunile sunt  $(4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2)$ . Deci  $m(\sigma) = 5$ , de unde rezultă că  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^5 = -1$ .

b) Deoarece  $\varepsilon(x^2) = \varepsilon(x \circ x) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(x) = [\varepsilon(x)]^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon(x^2) = 1$ , iar  $\varepsilon(\sigma) = -1$ , deducem că  $x^2$  este o permutare pară pentru orice  $x \in S_4$ , iar  $\sigma$  este o permutare impară. Cum  $\varepsilon(x^2) \neq \varepsilon(\sigma)$ , adică  $1 \neq -1$ , atunci ecuația nu poate avea soluții.

## Probleme propuse

1. Dacă  $S_n$  reprezintă mulțimea permutărilor de ordin  $n$ , să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , în următoarele cazuri:

a)  $\text{card } S_n = 24$ ;      b)  $\text{card } S_n = 720$ ;      c)  $\text{card } S_n = 120$ .

2. Să se calculeze  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  și  $\sigma_2 \circ \sigma_1$ , în cazurile următoare:

a)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

b)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;

d)  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

3. Să se calculeze  $\sigma^2$ ,  $\sigma^3$ ,  $\sigma^4$  și  $\sigma^{2012}$  în cazurile următoare:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

d)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Arătați că pentru orice  $\sigma \in S_n$ , există  $p \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\sigma^p = e$ , unde  $e$  este permutarea identică din  $S_n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

5. Să se determine cel mai mic număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\sigma^n = e$ , în fiecare dintre cazurile următoare:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:

a)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

b)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$$c) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad d) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$e) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad f) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Să se rezolve următoarele ecuații:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad x \in S_3.$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad x \in S_4.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad x \in S_5.$$

8. Să se rezolve următoarele ecuații:

$$a) x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad x \in S_3.$$

$$b) x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x \in S_4.$$

$$c) x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad x \in S_5.$$

9. Fie permutările  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Să se rezolve în  $S_5$  următoarele ecuații:

$$a) \beta \circ x = \alpha;$$

$$b) \alpha^2 \circ x = \beta;$$

$$c) x \circ \beta^3 = \alpha;$$

$$d) \beta \circ x \circ \alpha = \alpha \circ \beta.$$

10. Fie permutările  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  și  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

Să se rezolve în  $S_4$  următoarele ecuații:

$$a) \alpha \circ x = \beta^{120};$$

$$b) x \circ \beta = \alpha^{250};$$

$$c) \alpha^{2000} \circ x \circ \beta^{2000} = e.$$