CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU
CRISTINA - PAULA MARIN

ALGEBRĂ

pentru elevii claselor

XI - XII

Subiecte pregătitoare pentru
EXAMENUL DE BACALAUREAT
şi concursul de admitere
în învăţământul superior

SINTEZE DE TEORIE
EXERCIŢII ŞI PROBLEME
- Fixarea cunoştinţelor
- Aprofundarea cunoştinţelor
- Performanţă
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă

ROMANIA · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA · I C A R

CUPRINS

* *E – enunțuri*

** *R – răspunsuri, rezolvări*

I Permutări

Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

Noțiuni introductive

- Fie mulțimea finită $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$, se numește *permutare* de ordin n, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Mulțimea tuturor permutărilor de ordin n se notează cu S_n, iar card $S_n = n!$.
- Orice permutare de ordinul n, se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

- Permutarea $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$ se numește *permutare identică* de ordin n (se mai notează și simplu cu e).
- *Exemple*:

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, unde $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$.

2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, unde $\tau(1) = 4, \tau(2) = 3, \tau(3) = 2, \tau(4) = 1$.

3) $e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Compunerea permutărilor

Definiție. Considerăm permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in S_n$. Atunci permutarea

Rezolvare.

Aplicăm definiția inversiunii într-o permutare:

$1<2 \Rightarrow 3>2$, $\quad 2<4 \Rightarrow 2 \not> 5$,

$1<3 \Rightarrow 3>1$, $\quad 2<5 \Rightarrow 2 \not> 4$,

$1<4 \Rightarrow 3 \not> 5$, $\quad 3<4 \Rightarrow 1 \not> 5$,

$1<5 \Rightarrow 3 \not> 4$, $\quad 3<5 \Rightarrow 1 \not> 4$,

$2<3 \Rightarrow 2>1$, $\quad 4<5 \Rightarrow 5>4$.

Inversiunile sunt (3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 4), deci $m(\sigma)=4$.

Atunci $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^4=1$, deci permutarea σ este pară.

Transpoziții

Permutarea de ordin n, notată τ_{ij} și definită prin

$\tau_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește *transpoziție* (τ_{ij} permută numai elementele i și j din linia a doua a tabloului, restul elementelor rămânând neschimbate).

Observații:

1) Orice transpoziție este o permutare impară.

2) $\tau_{ij}^{-1}=\tau_{ij}$ și $\tau_{ij}^{\,2}=e_n$.

Probleme rezolvate

1. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați permutările α^{-1} și β^{-1}.

b) Rezolvați ecuațiile $x \circ \alpha=\beta$ și $\beta \circ y=\alpha$, în S_3.

Rezolvare.

a) $\alpha^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $x \circ \alpha=\beta$. Se compune cu α^{-1}, la dreapta ecuației:

$$x=\beta\circ\alpha^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\beta \circ y=\alpha$. Se compune cu β^{-1}, la stânga ecuației:

$$y=\beta^{-1}\circ\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\in S_4$. Să se calculeze:

a) σ^2, σ^3, σ^4.

b) σ^{2012}.

Rezolvare

a) $\sigma^2=\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

$$\sigma^3=\sigma^2\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4=\sigma^3\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=e.$$

b) $\sigma^{2012}=\sigma^{2008+4}=\sigma^{2008}\circ\sigma^4=\left(\sigma^4\right)^{502}\circ\sigma^4=e^{502}\circ\sigma^4=e\circ\sigma^4=\sigma^4=e.$

3. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării σ.

b) Să se arate că ecuația $x^2=\sigma$ nu are soluții în S_4.

Rezolvare.

a) Aplicăm definiția inversiunii în permutarea σ:

$1<2\Rightarrow 4>3$, $\quad 2<3\Rightarrow 3>1$,

$1<3\Rightarrow 4>1$, $\quad 2<4\Rightarrow 3>2$,

$1<4\Rightarrow 4>2$, $\quad 3<4\Rightarrow 1\not>2$.

Inversiunile sunt (4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2). Deci $m(\sigma)=5$, de unde rezultă că $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^5=-1$.

b) Deoarece $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(x\circ x)=\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x)=[\varepsilon(x)]^2=1\Rightarrow\varepsilon(x^2)=1$, iar $\varepsilon(\sigma)=-1$, deducem că x^2 este o permutare pară pentru orice $x\in S_4$, iar σ este o permutare impară. Cum $\varepsilon(x^2)\neq\varepsilon(\sigma)$, adică $1\neq-1$, atunci ecuația nu poate avea soluții.

Probleme propuse

1. Dacă S_n reprezintă mulțimea permutărilor de ordin n, să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, în următoarele cazuri:

a) card $S_n = 24$; b) card $S_n = 720$; c) card $S_n = 120$.

2. Să se calculeze $\sigma_1 \circ \sigma_2$ și $\sigma_2 \circ \sigma_1$, în cazurile următoare:

a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se calculeze σ^2, σ^3, σ^4 și σ^{2012} în cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^p = e$, unde e este permutarea identică din S_n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

5. Să se determine cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\sigma^n = e$, în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Să se calculeze inversele următoarelor permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; d) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

e) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$; f) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

7. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\circ x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $x\in S_3$.

b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\circ x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $x\in S_4$.

c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\circ x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $x\in S_5$.

8. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $x\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $x\in S_3$.

b) $x\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $x\in S_4$.

c) $x\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $x\in S_5$.

9. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ și $\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Să se rezolve în S_5, următoarele ecuații:

a) $\beta\circ x=\alpha$; b) $\alpha^2\circ x=\beta$;
c) $x\circ\beta^3=\alpha$; d) $\beta\circ x\circ\alpha=\alpha\circ\beta$.

10. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ și $\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Să se rezolve în S_4, următoarele ecuații:
a) $\alpha\circ x=\beta^{120}$; b) $x\circ\beta=\alpha^{250}$; c) $\alpha^{2000}\circ x\circ\beta^{2000}=e$.