CUPRINS

ALGEBRĂ

SOLUȚII – ALGEBRĂ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

SOLUȚII – ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul 2

Inele şi corpuri

2.1. Inel, exemple. Reguli de calcul într-un inel. Subinel

1. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc operaţiile (legile de compoziţie): $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este domeniul de integritate.

b) Să se determine elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi inversele acestor elemente.

2. Pe mulţimea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc operaţiile algebrice: $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ şi $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + 3\, y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Să se arate că $(A, \oplus, \odot)$ este domeniu de integritate.

3. Să se demonstreze că un element x al inelului $(A, +, \cdot)$ este inversabil dacă şi numai dacă x nu este divizor al lui zero. Să se scrie apoi divizorii lui zero şi elementele inversabile pentru fiecare dintre inelele $(\mathbb{Z}_6, + \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$ (*inel boolean*). Să se arate că:

a) $x + x = 0$, $\forall\, x \in A$;
b) A este comutativ.

5. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră operaţiile algebrice: $x \top y = ax + by + c$ şi $x \perp y = x \cdot y$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, \top, \perp)$ să fie inel comutativ.

6. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Să se arate că A este comutativ în fiecare din cazurile următoare:

a) $x^6 = x$, $\forall\, x \in A$;
b) $x^{12} = x$, $\forall\, x \in A$;
c) $x^3 = x$, $\forall\, x \in A$,
d) $x^{14} = x^3$, $\forall\, x \in A$.

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu cel puţin două elemente. Atunci:

a) Elementul neutru al grupului $(A, +)$ nu este inversabil.

b) Dacă $\bigcup(A) = \{x \in A \mid x \text{ inversabil}\}$, atunci $(\bigcup(A), \cdot)$ este grup (numit *grupul unităţilor* din inelul A).

c) Să se scrie $\bigcup(A)$ pentru inelele: $(\mathbb{Z}_9, + \cdot)$; $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$; $(\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$; unde $\mathbb{Z}[i] = \{a + b_i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (*inelul întregilor* lui Gauss).

d) Dacă inelul nu are divizori ai lui zero şi char $(A) \neq 2$, atunci $|\bigcup(A)|$ este par.

8. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu proprietatea: $x + x + x = 0$, $\forall\, x \in A$.

Să se arate că $(x + y)^3 = x^3 + y^3$, $\forall\, x, y \in A$.

9. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ. Să se arate că:

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2,\ \forall\, x, y \in A$.

b) $(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot y + \ldots + C_n^n y^n,\ \forall\, x, y \in A$.

10. Fie A_1 şi A_2 două inele. Pe mulţimea $A = A_1 \times A_2$ definim legile de compoziţie:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \text{ şi } (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2,\ y_1 y_2)$$

a) Să se arate că A are o structură de inel în raport cu aceste legi de compoziţie (A este numit *produsul direct* al inelelor A_1 şi A_2).

b) Să se arate că A este inel comutativ dacă şi numai dacă A_1 şi A_2 sunt inele comutative.

c) Să se determine grupul unităţilor inelului $A = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ şi să se verifice că $\bigcup(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5) = \bigcup(\mathbb{Z}_4) \times \bigcup(\mathbb{Z}_5)$.

d) Folosind tabla adunării şi înmulţirii din inelul A = $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ să se arate că A are divizori ai lui zero.

e) Să se arate că $\bigcup(A_1 \times A_2) = \bigcup(A_1) \times \bigcup(A_2)$, pentru orice inele $(A_1, +. \cdot)$ şi $(A_2, +, \cdot)$.

f) Să se generalizeze produsul direct pentru n inele.

11. Fie E o mulţime nevidă. Pe mulţimea $\mathscr{P}(E)$ a părţilor lui E introducem legile de compoziţie:

$$X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X);\ X \odot Y = X \cap Y;\ \forall\, X, Y \in \mathscr{P}(E).$$

Să se arate că $(\mathscr{P}(E), \oplus, \odot)$ este inel boolean. Alcătuiţi tabla adunării şi tabla înmulţirii acestui inel când $E = \{a, b\}$.

12. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Un element $a \in A$ se numeşte *nilpotent* dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n = 0$. Dacă unicul element nilpotent este zero, A se numeşte *redus*.

a) Să se determine elementele nilpotente ale inelului $\mathbb{Z}_8$.

b) Să se indice elemente nilpotente în inelele $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$.

c) Dacă A este inel comutativ iar a şi b sunt elemente nilpotente, să se arate că $a + b$ şi $a \cdot b$ sunt nilpotente.

d) Dacă $a \in A$ este nilpotent să se arate că $1 - a$ şi $1 + a$ sunt elemente inversabile.

e) Dacă $1 + b$ este nilpotent, atunci b este inversabil.

f) A este *redus* dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in A$ cu $a^2 = 0$, rezultă $a = 0$.

13. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, astfel încât $x^2 = 0$ să avem $x = 0$. Să se arate că dacă $x_1, x_2, x_3 \in A$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$, atunci:

a) $x_2 \cdot x_3 \cdot x_1 = 0$ şi $x_3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$;

b) $x_1 \cdot a \cdot x_2 \cdot b \cdot x_3 = 0,\ \forall\, a, b \in A$;

c) $x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)} = 0$, pentru orice permutare $\sigma \in S_3$.

14. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel necomutativ şi fie $a, b \in A$. Să se arate că dacă $1 - a \cdot b$ este inversabil, atunci şi $1 - b \cdot a$ este inversabil.

15. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel cu $0 \neq 1$ şi $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$. Să se arate că dacă $x^3 \cdot y^2 = y^2 \cdot x^3$, $\forall\, x, y \in A$, atunci inelul A este comutativ.

16. a) Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel în care $x \cdot (x^2 + y) \cdot y = y \cdot (x^2 + y) \cdot x$, $\forall\, x, y \in A$. Să se arate că A este comutativ.

b) Idem, dacă $(x^2 - x) \cdot y = y \cdot (x^2 - x)$.

17. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel şi fie $C(A) = \{a \in A \mid a \cdot x = x \cdot a,\ \forall\, x \in A\}$ ($C(A)$ se numeşte *centrul* inelului A).

a) Să se arate că $C(A)$ este o parte stabilă a lui A în raport cu adunarea şi înmulțirea şi că formează inel față de operațiile induse.

b) Dacă $a^2 - a \in C(A)$, $\forall\, a \in A$, arătați că A este inel comutativ.

c) Să se determine centrul inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot\ )$.

18. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, una din următoarele afirmații este adevărată:

a) $a^2 = a$; b) $a^2 = a + 1$; c) $a = a^2 + 1$.

Să se arate că inelul A este comutativ.

19. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel comutativ. Un element $a \in A$ se numeşte *idempotent* dacă $a^2 = a$. Dacă $a, b \in A$ sunt elemente idempotente, să se arate că:

a) Elementele ab, $1 - a$ şi $1 - b$ sunt idempotente.

b) $ab \cdot (1 - a) = 0$ şi $ab \cdot (1 - b) = 0$.

20. În inelul $(A, +, \cdot\ )$ se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y - x \cdot y$, $\forall\, x, y \in A$.

a) Să se arate că „$*$” este asociativă şi admite element neutru.

b) Dacă $1 - x$ are simetric în inelul A atunci x are simetric față de legea „$*$”.

21. În inelul $(A, +, \cdot\ )$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + yx$, $\forall\, x, y \in A$. Să se arate că:

a) Legea„$*$” este comutativă, dar nu este asociativă.

b) Legea „$*$” este distributivă față de adunare.

c) $[(x * x) * y] * x = (x * x) * (y * x)$, $\forall\, x, y \in A$.

22. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel finit cu $1 \neq 0$ şi fie M mulțimea elementelor sale idempotente (vezi ex. 19).

a) Să se arate că dacă M este mulțimea finită, atunci M are un număr par de elemente şi să se calculeze suma lor.

b) Dacă A este comutativ să se calculeze produsul elementelor nenule din mulțimea M.

23. Fie $(A, +, \cdot\ )$ un inel cu proprietatea că, pentru orice $a \in A$, $a^2 = 0$ implică $a = 0$. Se consideră centrul lui A, adică mulțimea $C(A) = \{a \in A \mid ax = x \cdot a,\ \forall\, x \in A\}$.

Să se arate că:

a) Dacă $a \in A$ şi $b^2 = b$, $b \in A$, atunci $b \cdot a \cdot b = a \cdot b$.

b) Orice element idempotent din A aparține lui $C(A)$.

24. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $(x^3 + x^2 + x) \cdot y = y \cdot (x^3 + x^2 + x)$, $\forall\, x, y \in A$. Să se arate că inelul A este comutativ.

25. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \cdot 1 = 0$ (adică $\underbrace{1+1+\ldots+1=0}_{n \text{ ori}}$), atunci cel mai mic n cu această proprietate se numeşte *caracteristica inelului A*. În caz contrar, adică $n \cdot 1 \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, spunem că inelul *A are caracteristica zero*.

a) Să se precizeze caracteristica pentru inelele: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

b) Să se arate că dacă A nu are divizori ai lui zero, atunci caracteristica sa este zero sau un număr prim.

26. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu p elemente, p număr prim. Să se arate că p este caracteristica inelului, iar A este un inel comutativ.

27. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$.

a) Dacă $a \in A$ şi $1 + 1 = 0$, să se exprime $(a + 1)^n$ ca sumă de puteri ale lui a pentru $n \in \{2,3,4,5\}$.

b) Dacă $a \in A$ şi $1 + 1 + 1 = 0$, să se exprime $(a + 1)^n$ pentru $n \in \{3,4,5\}$.

c) Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^{n+1} = a^n$, $\forall\, a \in A$, să se arate că $1 + 1 = 0$ şi că $a^2 = a$, $\forall\, a \in A$ (A este boolean).

28. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $0 \neq 1$. Un element $a \in A$ se numeşte *involutiv* dacă $a^2 = 1$ şi se numeşte *pseudoinvolutiv* dacă există $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ astfel încât $a^k = 1$. Să se scrie elementele involutive, pseudoinvolutive, idempotente şi nilpotente (vezi exerciţiile anterioare) pentru inelele $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$.

29. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $x \in A$ un element nilpotent. Să se arate că:

a) $1 - x^2$ este inversabil.

b) $(1 - x^p)^q \cdot (1 + x^r)^s$ este inversabil pentru orice $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$.

30. Fie $(G, +)$ un grup comutativ, şi fie mulţimea $H = \{f : G \to G \mid f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in G\}$, înzestrată cu legile de compoziţie notate „$\oplus$" şi „$\circ$" şi care sunt definite în modul următor:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, f, g \in H \text{ şi } \forall\, x \in G;$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ \forall\, f, g \in H \text{ şi } \forall\, x \in G.$$

Să se arate că $(H, \oplus, \circ)$ este un inel.

31. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel, E o mulţime şi $\mathscr{F}(E, A) = \{f \mid f : E \to A\}$.

Dacă $f, g \in \mathscr{F}(E, A)$, se definesc operaţiile:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in G;$$
$$(f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \forall\, x \in G.$$

a) Să se arate că $(\mathscr{F}(E, A), \oplus, \odot)$ este inel.

b) Dacă inelul A este comutativ atunci inelul $\mathscr{F}(E, A)$ este comutativ.

32. Să se arate că următoarele triplete $(A, +, \cdot)$ sunt inele, unde „+" şi „·" sunt operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor. Să se determine elementele inversabile şi să se precizeze dacă au divizori ai lui zero: