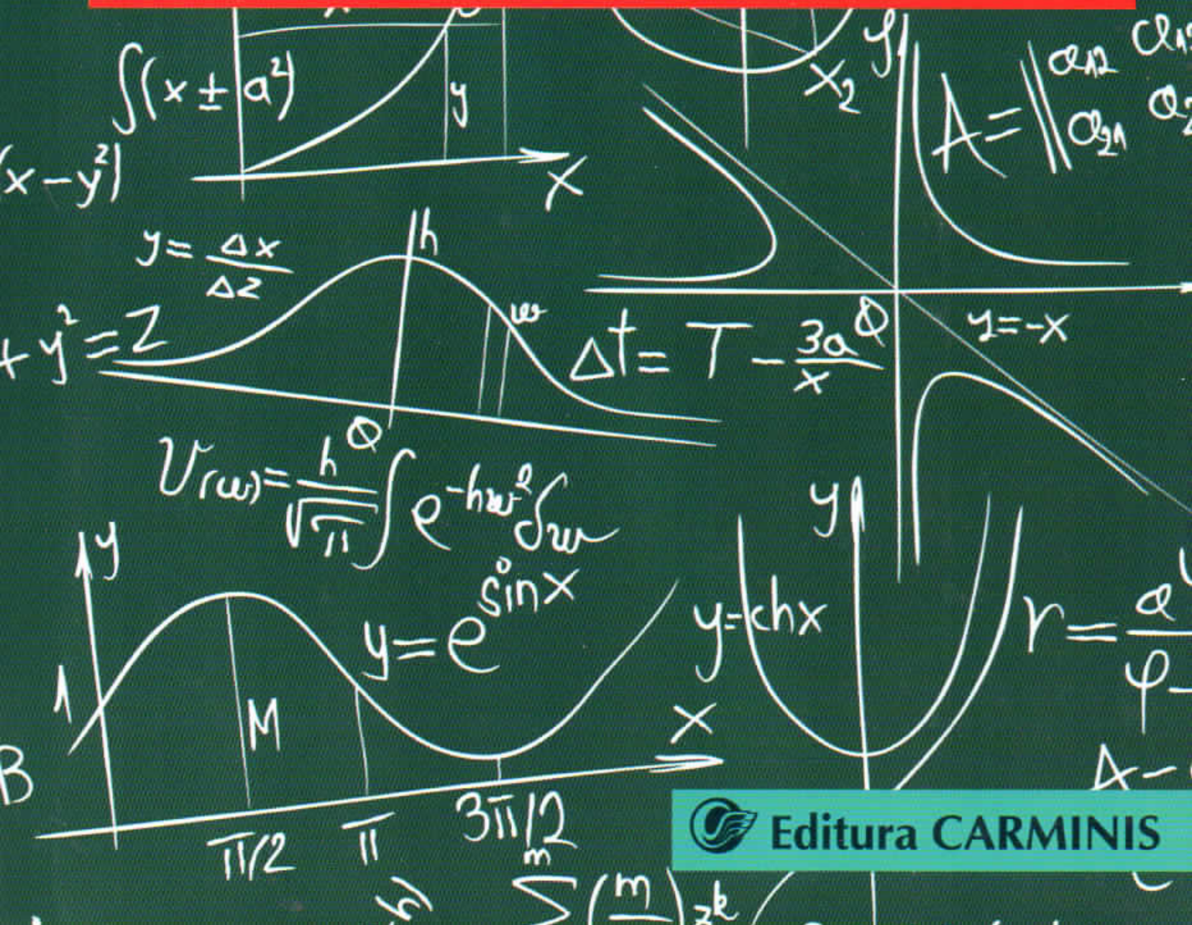
Ion Bucur Popescu

Ghid de pregătire
BACALAUREAT
MATEMATICĂ
M_mate-info



Editura CARMINIS

CUPRINS

TEME RECAPITULATIVE

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Noţiuni teoretice

Modulul numărului $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietăţile modulului: $|x| \geq 0$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| = \max(x, -x)$; $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$; $\left||x| - |y|\right| \leq |x - y|$; $|x| \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$, unde $r > 0$; $|x| > r \Leftrightarrow x \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)$.

Pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\exists!\ n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \leq x < n+1$, $n \overset{\text{not.}}{=} [x]$ – partea întreagă a lui x, $x - [x] = \{x\}$ – partea fracţionară a lui x.

Proprietăţi: $x - 1 < [x] \leq x$; $\{x\} \in [0, 1)$; $[x + n] = [x] + n$ şi $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Principiul inducţiei matematice. Fiind dat un predicat $P(n)$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dacă propoziţia $P(n_0)$ este adevărată şi, de asemenea, implicaţia $P(k) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată, atunci propoziţia $P(n)$ este adevărată, $\forall\ n \geq n_0$.

Cardinalul unei mulţimi finite (notat $\text{card}(A)$ sau $|A|$) reprezintă numărul său de elemente.

Proprietăţi: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $|P(A)| = 2^{|A|}$ $(P(A) = \{B \mid B \subset A\})$.

O funcţie definită pe mulţimea nevidă A cu valori în mulţimea nevidă B (notăm $f : A \rightarrow B$) reprezintă o lege prin care, pentru $\forall\ a \in A$, $\exists!\ b \in B$ astfel încât $a \xrightarrow{f} b$.

Pentru $A' \subset A$, $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$ reprezintă imaginea lui A' prin f, $\text{Im} f = f(A)$ reprezintă imaginea funcţiei f, iar pentru $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ reprezintă preimaginea lui B' prin f.

Mulţimea $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ reprezintă graficul funcţiei f.

Pentru $A' \subset A$, funcţia $f_{A'} : A' \rightarrow B$, unde $f_{A'}(a) = f(a)$, $\forall\ a \in A'$, reprezintă restricţia funcţiei f la mulţimea A', iar f reprezintă prelungirea funcţiei $f_{A'}$ la A.

Funcţia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, se numeşte mărginită dacă $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, $\forall\ x \in D$.

Mulţimea $D \subset \mathbb{R}$ se numeşte simetrică dacă $-x \in D$, pentru $\forall\ x \in D$.

Funcţia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D simetrică, se numeşte pară (respectiv impară) dacă $f(-x) = f(x)$ (respectiv $f(-x) = -f(x)$) pentru $\forall\ x \in D$. Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa

Aplicații

1. Să se determine x real știind că numerele $x+1$, $1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.

2. Să se determine punctele de intersecție a parbolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

3. Să se determine $x>0$ știind că numerele x, 6 și $x-5$ sunt în progresie geometrică.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f(2\cdot f(-1))$.

5. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n=\dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

6. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y=x^2+x+1$ și $y=-x^2-2x+6$.

7. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ și $g(x)=x-2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\ge 0$.

8. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17\ldots$.

9. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

10. Să se arate că $\dfrac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{3x\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului a.

11. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

12. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(3-m^2)x+3$, să fie strict crescătoare.

13. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$.

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$. Să se calculeze suma $S=f(f(-10))+ +f(f(-9))+\ldots+f(f(-1))+f(f(1))+\ldots+f(f(9))+f(f(10))$.

15. Să se arate că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x^4$ este $f(0)$.

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

17. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox.

18. Să se determine valorile parametrului real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

19. Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

20. Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

21. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ de rație 2 cu $a_3+a_4=8$. Să se afle a_1.

22. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x$. Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+\ldots+f(-10)$.

23. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.

24. Se dau funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f \circ g$ este descrescătoare.

25. Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2. Știind că $|x_1 - x_2| = 1$, să se determine m.

26. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ se află pe dreapta de ecuație $x + y = 7$.

27. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0, 4)$, $(1, -2)$ și $(-1, 1)$.

28. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2 + x - 6 \leq 0$.

29. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.

30. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + 4x^2}$.

Rezolvări

1. Avem $\div\ x + 1, 1 - x, 4 \Leftrightarrow 2(1 - x) = x + 1 + 4 \Leftrightarrow x = -1$.

2. Ecuația $x^2 + 5x - 6 = 0$ admite soluțiile $x_1 = -6$ și $x_2 = 1$, deci $G_f \cap Ox = \{(-6, 0), (1, 0)\}$. Pentru $x = 0$ obținem $y = 0^2 + 5 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow G_f \cap Oy = \{(0, -6)\}$.

3. Avem $\div\, x, 6, x - 5 \Leftrightarrow 6^2 = x(x - 5) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -4 \notin (0, \infty)$, respectiv $x_2 = 9 \in (0, \infty)$, deci $x = 9$ este soluția problemei.

4. Avem $f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \Rightarrow 2 \cdot (f(-1)) = 2 \cdot (-2) = -4$, iar $f(-4) = (-4)^2 + (-4) - 2 = 10$, deci $f(2 \cdot f(-1)) = 10$.

5. Avem $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4(n+1)}{n+4} - \dfrac{4n}{n+3} = \dfrac{4[(n+1)(n+3) - n(n+4)]}{(n+4)(n+3)} = \dfrac{12}{(n+4)(n+3)} > 0$ pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător.

6. Coordonatele punctelor de intersecție dintre cele două parabole sunt soluțiile sistemului $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -\dfrac{5}{2}$ și $x_2 = 1$, la care corespund $y_1 = \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 1 = \dfrac{19}{4}$, respectiv $y_2 = 1^2 + 1 + 1 = 3$, deci punctele de intersecție au coordonatele $(x_1, y_1) = \left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{19}{4}\right)$, respectiv $(x_2, y_2) = (1, 3)$.

TESTE

TESTUL 1

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

3. Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie egală cu 4.

6. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b\in\mathbb{R}$ și $b\ne 0$.

a) Să se arate că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există u, $v\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

c) Să se rezolve în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

a) Să se verifice dacă, pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\ne\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4})$, $\forall\, x\in\mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.

a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.
b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.
c) Să se determine $a\in(0,\infty)$, știind că $f(x)\ge 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției f.

b) Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\dfrac{1}{e}$ și $x=e$.

Rezolvări

I. 1. Termenii sumei aparțin unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu primul termen $a_1=1$ și rația $r=a_2-a_1=5-1=4$. Avem $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=1+(n-1)\cdot 4=4n-3,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că $S_n=a_1+a_2+...+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\dfrac{(1+4n-3)\cdot n}{2}=(2n-1)\cdot n=2n^2-n$, pentru $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $S_n=2n^2-n=231$, obținem ecuația de gradul al II-lea $2n^2-n-231=0$, cu $a=2,\ b=-1,\ c=-231,\ \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-231)=1849=43^2$, deci $n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=$ $=\dfrac{1\pm 43}{4},\ n_1=\dfrac{1-43}{4}=-\dfrac{21}{2}\notin\mathbb{N},\ n_2=\dfrac{1+43}{4}=11\in\mathbb{N}$, deci $n=11\Rightarrow x=a_n=a_{11}=4\cdot 11-3=41$, adică $x=41$.

2. Avem o inecuație de gradul al II-lea cu $a=2,\ b=-5,\ c=3,\ \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-$ $-4\cdot 2\cdot 3=1,\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5\pm 1}{4},\ x_1=\dfrac{5-1}{4}=1,\ x_2=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Din relațiile $a=2>0,\ x_1=1$ și $x_2=\dfrac{3}{2}$, deducem că $2x^2-5x+3\le 0\Leftrightarrow x\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.

3. Pentru $x\in(0,\infty)$ și $y\in(1,\infty)$, avem $x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$, deci $f^{-1}(y)=x=\sqrt{y-1}$ sau, notând variabila tot cu x, avem $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1},\ f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$.

4. Fie $A'=A-\{1\}$ submulțimea elementelor diferite de elementul 1. Evident $|A|=10$ și $|A'|=9$. Mulțimea A admite C_{10}^3 submulțimi de trei elemente, dintre care C_9^3 sunt și submulțimile lui $A'\subset A$, submulțimi care nu conțin elementul 1, deci rămân $C_{10}^3-C_9^3=C_9^2=$ $=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$ de submulțimi cu trei elemente care conțin elementul 1.

5. Avem $AB=\sqrt{(2-m)^2+[m-(-2)]^2}=\sqrt{(2-m)^2+(m+2)^2}=\sqrt{2m^2+8}$, deci $AB=4\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{2m^2+8}=4\Leftrightarrow 2m^2+8=4^2=16\Leftrightarrow 2m^2=16-8=8\Leftrightarrow m^2=\dfrac{8}{2}=4\Leftrightarrow m_{1,2}=\pm 2$, deci $m\in\{-2,2\}\subset\mathbb{R}$.

6. $\cos\frac{23\pi}{12}=\cos\frac{(24-1)\pi}{12}=\cos\left(\frac{24\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, unde am folosit periodicitatea şi paritatea funcţiei cosinus.

Atunci $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

II. 1. a) Fie $X\in M_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}u & v\\ z & t\end{pmatrix}$, astfel încât $AX=XA$. Avem $AX=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & v\\ z & t\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}au+bz & av+bt\\ bu+az & bv+at\end{pmatrix}$ şi $XA=\begin{pmatrix}u & v\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au+bv & bu+av\\ az+bt & bz+at\end{pmatrix}$, deci $AX=XA\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}au+bz & av+bt\\ bu+az & bv+at\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au+bv & bu+av\\ az+bt & bz+at\end{pmatrix}\Leftrightarrow au+bz=au+bv,\ av+bt=bu+av,\ bu+az=az+bt$ şi $bv+at=bz+at\Leftrightarrow bz=bv$ şi $bt=bu\Leftrightarrow z=v$ şi $t=u$, deoarece $b\neq 0$.

Deci $X=\begin{pmatrix}u & v\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & v\\ v & u\end{pmatrix}$.

b) Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice proprietatea $P(n):A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ y_n & x_n\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$ şi $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

Pentru $n=1$ obţinem $P(1):A^1=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ y_1 & x_1\end{pmatrix}$, evident adevărată, deoarece $x_1=\frac{(a+b)^1+(a-b)^1}{2}=a$ şi $y_1=\frac{(a+b)^1-(a-b)^1}{2}=b$.

Presupunem adevărată proprietatea $P(k)$ pentru un $k\in\mathbb{N}^*$ oarecare şi demonstrăm că şi proprietatea $P(k+1)$ este adevărată.

Avem $A^k=\begin{pmatrix}x_k & y_k\\ y_k & x_k\end{pmatrix}$, unde $x_k=\frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2}$ şi $y_k=\frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2}$.

Atunci $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}x_k & y_k\\ y_k & x_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_k+by_k & bx_k+ay_k\\ ay_k+bx_k & by_k+ax_k\end{pmatrix}$. Observăm că $ax_k+by_k=$
$=a\cdot\frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2}+b\cdot\frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2}=\frac{(a+b)^{k+1}+(a-b)^{k+1}}{2}=x_{k+1}$, şi $ay_k+bx_k=$
$=a\cdot\frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2}+b\cdot\frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2}=\frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2}=y_{k+1}$, deci
$A^{k+1}=\begin{pmatrix}x_{k+1} & y_{k+1}\\ y_{k+1} & x_{k+1}\end{pmatrix}\Rightarrow P(k+1)$ este adevărată.

Deci proprietatea $P(n): A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ și $y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$, este adevărată pentru $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Deoarece $X^4 = X \cdot X^3 = X^3 \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\ u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$. Atunci $X^3 = \begin{pmatrix} u_3 & v_3 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix}$, unde $u_3 = \frac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2}$ și $v_3 = \frac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2}$.

Din $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2} = 2$ și $\frac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2} = 1$. Adunând, respectiv scăzând aceste relații, obținem $(u+v)^3 = 3 \Leftrightarrow u+v = \sqrt[3]{3}$ și $(u-v)^3 = 1 \Leftrightarrow u-v = 1$, de unde deducem că $u = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$ și $v = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$, deci $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{3}+1 & \sqrt[3]{3}-1 \\ \sqrt[3]{3}-1 & \sqrt[3]{3}+1 \end{pmatrix}$.

2. a) În $\mathbb{Z}_7$ avem $\hat{1}^6 = \hat{1}$, $\hat{2}^3 = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}^6 = \left(\hat{2}^3\right)^2 = \hat{1}^2 = \hat{1}$, $\hat{3}^2 = \hat{2} \Rightarrow \hat{3}^6 = \left(\hat{3}^2\right)^3 = \hat{2}^3 = \hat{1}$, $\hat{4}^2 = \hat{2} \Rightarrow \hat{4}^6 = \left(\hat{4}^2\right)^3 = \hat{2}^3 = \hat{1}$, $\hat{5}^2 = \hat{4} \Rightarrow \hat{5}^6 = \left(\hat{5}^2\right)^3 = \hat{4}^3 = \hat{4}^2 \cdot \hat{4} = \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{1}$ și $\hat{6}^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{6}^6 = \hat{1}$, deci $b^6 = \hat{1}$ pentru $\forall\ b \in \mathbb{Z}_7^*$.

b) Avem $\left(x^3 - \hat{4}\right)\left(x^3 + \hat{4}\right) = x^6 - \hat{4}^2 = x^6 - \hat{2} = x^6 + \hat{5}$, pentru $\forall\ x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Pentru $a = \hat{0}$, avem $f = X^6 + \hat{5} = \left(X^3 - \hat{4}\right)\left(X^3 + \hat{4}\right)$, deci polinomul f este reductibil. Pentru $a \in \mathbb{Z}_7^*$, $\exists\ b \in \mathbb{Z}_7^*$ astfel încât $b = a^{-1}$ și observăm că $f(b) = b^6 + ab + \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$, deci $(X - b) \mid f$, adică polinomul f este reductibil.

III. 1. a) Avem $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - ax}{x} = -a$ și $n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^x - ax + ax\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, deci $y = mx + n = -ax$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f către $-\infty$.

b) Avem $f'(x) = \left(e^x - ax\right)' = e^x - a$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Observăm că $f'(x) < 0$ pentru $\forall\ x < \ln a$, deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \ln a)$, respectiv $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_0 = \ln a$, precum și faptul că $f'(x) > 0$ pentru $\forall\ x > \ln a$, adică funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(\ln a, \infty)$.

c) Observăm că $f(0) = e^0 - a \cdot 0 = 1$, deci $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ pentru $\forall\ x \in \mathbb{R}$, de unde deducem că $x_0 = 0$ este punct de minim global pentru funcția f și atunci, conform teoremei lui Fermat, avem $f'(0) = 0$, deci $e^0 - a = 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

c) Avem $\int f(x)dx = \int x^2 \sin x\,dx = -\int x^2(\cos x)'dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$

$= -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) = \left(-x^2+2\right)\cos x + 2x\sin x + C,$

deci primitiva F a lui f este de forma $F(x) = \left(-x^2+2\right)\cos x + 2x\sin x + k$, unde $k \in \mathbb{R}$.

Fie şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = 2n\pi$ şi $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Evident avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ şi $F(x_n) = F(2n\pi) = -4n^2\pi^2 + k$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) =$

$= -\infty$, şi $F(y_n) = F\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (4n+1)\pi + k$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} F(y_n) = +\infty$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} F(y_n)$, deşi $x_n \to \infty$ şi $y_n \to \infty$, deducem că funcţia F nu admite limită la $+\infty$.

TESTUL 60

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se arate că $2\left(1+3+3^2+\ldots+3^8\right) < 3^9$.

2. Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2+5x-7=0$. Să se arate că $x_1^3+x_2^3$ este întreg.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$.

4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$, astfel încât $C_{2x-3}^2 = 3$.

5. Se consideră punctele $A(2, 3)$ şi $B(-3, -2)$. Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

6. Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Ştiind că $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$, $|\vec{u}| = 2$ şi $|\vec{v}| = 3$, să se calculeze $\cos\left(\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})\right)$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.

a) Să se calculeze $f(A)$.

b) Să se arate că $(f \circ f)(X) = O_2$, $\forall\, X \in M_2(\mathbb{R})$.

c) Să se arate că $f(X) + f(Y) \neq I_2$, $\forall\, X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulţimea $P = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \middle| AA^t = I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine mulţimii P.

b) Să se arate că înmulţirea matricelor determină pe mulţimea P o structură de grup necomutativ.

c) Să se arate că, dacă $A, B \in P$, $X \in M_2(\mathbb{R})$ şi $AX = B$, atunci $X \in P$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

a) Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0,\infty)$.

b) Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că $g(x)<x$ pentru orice $x>0$, unde g este funcția definită la punctul b).

2. Fie mulțimea $M=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)dx=f(0)=f(1)\right\}$.

a) Să se arate că funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii M.

b) Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de gradul trei care aparține lui M, atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

c) Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

Rezolvări

I. 1. Avem $2\left(1+3+3^2+\ldots+3^8\right)=2\cdot\frac{3^9-1}{3-1}=3^9-1<3^9$.

2. Avem $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-5$ și $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=-7$, deci $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-$ $-3x_1x_2(x_1+x_2)=(-5)^3-3\cdot(-7)\cdot(-5)=-230\in\mathbb{Z}$.

3. Se impun condițiile $x>0$ și $x\neq 1\Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Folosind notația $\log_5 x=y$, ecuația devine $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2y^2-5y+2=0$, cu soluțiile $y_1=\frac{1}{2}$ și $y_2=2$. Revenind la notația $\log_5 x=y$, obținem $\log_5 x_1=y_1=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{5}$, respectiv $\log_5 x_2=y_2=2\Rightarrow x_2=5^2=25$. Deci $x\in\left\{\sqrt{5},25\right\}\subset(0,1)\cup(1,\infty)$.

4. Se impune condiția $2x-3\geq 2\Leftrightarrow x\geq\frac{5}{2}$, îndeplinită pentru $x\in\mathbb{N},\ x\geq 3$. Avem $C_{2x-3}^2=\frac{(2x-4)(2x-3)}{2}=(x-2)(2x-3)$, deci $C_{2x-3}^2=3\Rightarrow(x-2)(2x-3)=3\Rightarrow 2x^2-7x+$ $+3=0$, cu soluțiile $x_1=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$, respectiv $x_2=3\in\mathbb{N}\cap\left[\frac{5}{2},\infty\right)$. Deci $x=3$ este soluția ecuației.

5. Notăm cu M mijlocul segmentului AB. Atunci $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=-\frac{1}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=$ $=\frac{1}{2}$. Avem $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-3}{-3-2}=1$, unde $m=\text{panta}(AB)$. Fie d mediatoarea segmentului

Obținem $a+b+c=0$ și $\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0 \Big| \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{2b}{3}+c=0.$

Scăzând aceste relații, se obține $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=0 \Rightarrow b=-\frac{3}{2}a$ și din $a+b+c=0 \Rightarrow c=\frac{a}{2}$, deci $f(x)=ax^3-\frac{3a}{2}x^2+\frac{a}{2}x+d,\ a\in\mathbb{R}^*,\ d\in\mathbb{R}.$

Observăm că $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{8}-\frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}+d=d=f(0).$

c) Deoarece funcția f este derivabilă, deducem că f este continuă. Conform teoremei de medie pentru integrala Riemann, $\exists\, c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)\,dx=(1-0)\cdot f(c)=f(c).$

Aplicăm în continuare teorema lui Rolle:

$f(0)=f(c)\Rightarrow \exists\, c_1\in(0,c)$ astfel încât $f'(c_1)=0$

$f(c)=f(1)\Rightarrow \exists\, c_2\in(c,1)$ astfel încât $f'(c_2)=0$

Avem $(0,c)\cap(c,1)=\varnothing \Rightarrow c_1\neq c_2$, deci ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.