BACALAUREAT 2009

Carmen Angelescu, Nicolae Baciu, Ovidiu Bădescu,
Nicolai Buzduga, Constantin Chirilă, Daniela Chiteş,
Marinela-Cristina Cimpoeşu, Gabriela Constantinescu,
Dorel Cosic, Doina Cremenescu, Mihai Ionescu, Viorel Lupşor,
Laura Marin, Ioan Marinescu, Dan Nănuți, Daniel Năstruț,
Mihai Păuna, Ana Poştaru, Nicolae Stănică,
Gheorghe Stoianovici, Nicolae Suciu, Gheorghe Tirla,
Dorina Trifon, George Vlad, Cătălin Zîrnă

GHID DE PREGĂTIRE

MATEMATICĂ - M2

Filiera teoretică: profil real
Specializarea: ştiințe ale naturii
Filiera teoretică: toate profilurile, toate specializările

Lucrarea conține calendarul, programa şi

modele de rezolvare pentru enunțurile

publicate de M.E.C.I. la data de 27. 02. 2009

SIGMA

SUBIECTUL I

VARIANTA 1

5p 1. Să se calculeze $C_3^2+3!$.

5p 2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+4)=2$.

5p 3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-2=0$.

5p 4. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

5p 5. Fie punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4, AC=\sqrt{7}$ şi $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

Soluţii

1. $C_3^2+3!=\frac{3!}{2!\cdot 1!}+3!=3+6=9$.

2. Punem condiţia: $3x+4>0 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}, D=\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$. Din $\log_5(3x+4)=2$ rezultă $3x+4=25$, adică $3x=21$, deci $x=7\in D$.

3. Din relaţiile lui Viéte: $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$. Dar $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$.

4. $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2$ este continuă şi strict descrescătoare pe $[0,1]$. Atunci mulţimea valorilor funcţiei f este: $f([0,1])=[f(1);f(0)]=[-1,0]$.

5. Cum $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\vec{i}+(3+1)\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, atunci $a=-3$ şi $b=4$.

6. Din teorema cosinusului avem $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$, adică $(\sqrt{7})^2=4^2+\sqrt{3}^2-2\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos B$. Rezultă că $8\sqrt{3}\cos B=12$, de unde $\cos B=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle B)=30°$.

VARIANTA 2

5p 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(3)\cdot f(4)$.

5p 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2-5x+5\le 1$.

5p 4. Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ numerele 3^x-1, 3^{x+1} și $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,-8)$ și $B(6,3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AC=2$, $m(\sphericalangle BAC)=30^\circ$ și $AB=4$.

Soluții

1. $f(x)=0$ dacă $x=3$; deci $f(3)=0$. Atunci $f(-4)\cdot f(-3)\cdot\ldots\cdot f(4)=0$.

2. Condiții: $\begin{cases}x+2>0\\x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\x>0\end{cases}$, deci $D=(0,+\infty)$.

$\log_2(x+2)+\log_2 x=3$, $\log_2 x(x+2)=3$, de unde $x^2+2x=2^3$, adică $x^2+2x-8=0$; $\Delta=36$, de unde $x_1=2\in D$ și $x_2=-4\notin D$. $S=\{2\}$.

3. $x^2-5x+5\leqslant 1$; $x^2-5x+4\leqslant 0$ rezultă $x\in[1,4]$. Dar $x\in\mathbb{Z}$, deci $x\in\{1,2,3,4\}$.

4. Cele trei numere sunt în progresie aritmetică dacă $3^{x+1}=\dfrac{3^x-1+5\cdot 3^x+1}{2}$, adică

$2\cdot 3^{x+1}=6\cdot 3^x$; $3^x\cdot 3=3\cdot 3^x$ (A), $\forall x\in\mathbb{R}$.

5. Avem $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}-8\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+3\vec{j}$. Atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=10\vec{i}-5\vec{j}$, deci coordonatele sunt $(10,-5)$.

6. $A_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{8\cdot\frac{1}{2}}{2}=2$.

VARIANTA 3

5p | 1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...

5p | 2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1,2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta sa fie divizibil cu 3.

5p | 3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x}=x$.

5p | 4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$.

5p | 5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

5p | 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}$; $m(\sphericalangle A)=30°$

Soluţii

1. Observăm că termenii şirului sunt în progresie aritmetică. Avem $a_1 = 1$ şi $r = 6$. Deci $a_{10}=a_1+9r=1+9\cdot 6=55$.

2. Fie numerele de acest fel notate $\overline{abc}$.
Fie funcţiile f : $\{a, b, c\} \to \{1, 2\}$. Sunt $2^3 = 8$ astfel de funcţii, adică 8 astfel de numere $\overline{abc}$, cu $a, b, c \in \{1, 2\}$. Deci sunt 8 numere de 3 cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1, 2\}$. Dintre ele, sunt divizibile cu 3 doar cele cu $a = b = c$, adică 111 şi 222. Atunci $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25$.

3. Din condiţiile de existenţă $2+x\geqslant 0$ şi $x\geqslant 0$, rezultă $x\in[0,+\infty)=D$. Ridicând la pătrat, ecuaţia devine $x^2-x-2=0$ având soluţiile $x_1=-1\notin D$ şi $x_2=2\in D$.

4. $f(-2)=2\cdot(-2)+1=-3$, $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$, $f(0)=2\cdot 0+1=1$, $f(1)=2\cdot 1+1=3$, deci $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)=0$.

5. (AB): $y-y_A=m(x-x_A)$; $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2+1}{1-2}=1$.

Rezultă (AB) : $y+1=x-2 \Leftrightarrow x-y-3=0$.

6. $A_{ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

VARIANTA 1

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-3x+2=0$.

5p a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

5p b) Să se arate că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

5p c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p a) Să se verifice că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $x\circ(-4)$, unde x este număr real.

5p c) Știind că operația „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$.

Soluții

1. a) Din relațiile lui Viéte avem: $x_1+x_2+x_3=0$.

b) Din: x_1 soluție a ecuației, avem $x_1^3-3x_1+2=0$,

x_2 soluție a ecuației, avem $x_2^3-3x_2+2=0$,

x_3 soluție a ecuației, avem $x_3^3-3x_3+2=0$.

Adunăm relațiile și obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{0}+6=0$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$.

c) Adunăm liniile 2 și 3 la linia 1.

$$d=\begin{vmatrix} \overbrace{x_1+x_2+x_3}^{0} & \overbrace{x_1+x_2+x_3}^{0} & \overbrace{x_1+x_2+x_3}^{0} \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$$

2. a) $(x+4)(y+4)-4=xy+4x+4y+12=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) $x\circ(-4)=(x+4)(-4+4)-4=-4, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $(-2009)\circ(-2008)\circ(-2007)\circ\ldots(-5)\circ(-4)\circ(-3)\ldots\circ 2009=-4$ deoarece $x\circ(-4)=(-4)\circ x=-4, \forall x\in\mathbb{R}$.

VARIANTA 2

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p a) Pentru $a=2$, $b=1$ şi $c=-1$, să se calculeze determinantul d.

5p b) Să se verifice că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p a) Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p c) Ştiind că operaţia „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

Soluţii

1. a) Calculăm direct prin regula triunghiului: $d=a^3+b^3+c^3-3abc=14$.

b) $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab+a^2+$

$+c^2-2ac+b^2+c^2-2bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2]$.

c) La punctul b) am obţinut $d=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2]$ şi

$d=a^3+b^3+c^3-3abc$, deci $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2]$.

Fie $2^x=a;\ 3^x=b;\ 5^x=c$. Avem: $\underbrace{8^x+27^x+125^x-3(2\cdot3\cdot5)^x}_{0}=$

$=\frac{1}{2}(2^x+3^x+5^x)[(2^x-3^x)^2+(5^x-2^x)^2+(3^x-5^x)^2]$. Ecuaţia devine

$(2^x+3^x+5^x)[(2^x-3^x)^2+(3^x-5^x)^2+(5^x-2^x)^2]=0$, deci $2^x=3^x=5^x$, de unde $x=0$ soluţie unică.

2. a) $2(x-3)(y-3)+3=2xy-6x-6y+18+3=2xy-6x-6y+21=x\circ y$, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$.

b) $x\circ3=6x-6x-18+21=3$; $3\circ x=6x-18-6x+21=3$, deci $x\circ3=3\circ x=3$.

c) Se observă că $x\circ3=2\cdot0+3=3$ şi $3\circ x=2\cdot0+3=3$. Atunci avem:

$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}=(1\circ\sqrt{2}\circ\ldots\circ\sqrt{8})\circ\sqrt{9}\circ(\sqrt{10}\circ\ldots\circ\sqrt{2009})=\sqrt{9}=3$.

VARIANTA 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p c) Să se demonstreze că $f(x)\leq -4$ pentru orice $x<-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, & x\leqslant 0\\ \sqrt{x}+1, & x>0\end{cases}$

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x f(x)\,dx$.

5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Soluții

1. a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)'=\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)'+\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) $f'(x)=0$, dacă $x\in\{0,-2\}$.

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ -1	0 $\quad +\infty$
$f'(x)$	$+++\ 0\ --$	$-\ 0\ +++$
$f(x)$	$\nearrow\ -4\ \searrow$	$\searrow\ 0\ \nearrow$

f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2]\cup[0;+\infty)$;

f este strict descrescătoare pe $[-2,-1)\cup(-1;0]$.

c) Din tabloul de variație alcătuit pentru punctul b) avem că

f strict crescătoare pe $(-\infty,-2]$, de unde $f(x)\leqslant f(-2)=-4$, $\forall x\in(-\infty,-2]$

f strict descrescătoare pe $[-2,-1)$, de unde $f(x)\leqslant f(-2)=-4$, $\forall x\in[-2,-1)$.

Deci $f(x)\leqslant -4$, $\forall x\in(-\infty,-1)$.

2. a) Limita la stânga, respectiv la dreapta a funcției f în $x_0=0$ este egală cu 1; $f(0)=1$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_{-1}^{0}(x^3+xe^x)\,dx=\dfrac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}x(e^x)'dx=-\dfrac{1}{4}+xe^x\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^x dx=\dfrac{2}{e}-\dfrac{5}{4}$.

c) $V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2\,dx=\pi\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx=\pi\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{17\pi}{6}$.

VARIANTA 2

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.
5p	a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.
5p	b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+...+g(2009)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.
	2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date prin $f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.
5p	a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.
5p	b Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.
5p	c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ pentru orice $x>1$.

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0+e^0=2$.

b) $f'(x)=e^x+e^{-x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $f''(x)=e^x-e^{-x}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$;

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})=2e^{-x}$.

$$g(0)+g(1)+...+g(2009)=2(\underbrace{e^0+e^{-1}+...+e^{-2009}}_{\substack{\text{Suma primilor 2010 termeni}\\ \text{în progresie geometrică, cu}\\ b_1=1;\ q=e^{-1};\ n=2010}})=2\cdot\frac{e^{-2010}-1}{e^{-1}-1}=2\cdot\frac{e^{2010}-1}{e^{2010}}\cdot\frac{e}{e-1}=$$

$$=2\cdot\frac{e^{2010}-1}{e^{2009}(e-1)}.$$

2. a) F derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=[(x-1)e^x]'=e^x+(x-1)\cdot e^x=x\cdot e^x=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) f continuă și pozitivă, deci $A=\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=(x-1)e^x\Big|_0^1=1$.

c) $\int_1^x\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\int_1^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(t)}{f(t)}\Bigg|_1^x=\frac{(t+1)e^t}{te^t}\Bigg|_1^x=\frac{t+1}{t}\Bigg|_1^x=\frac{x+1}{x}-2,\ \forall x>1.$

CUPRINS