

ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU

GABRIEL MÎRȘANU

ARITMETICĂ ALGEBRĂ GEOMETRIE

Clasa a VI-a

- Teste inițiale
- Considerații teoretice la noțiunile din programa școlară
- Modele de probleme rezolvate
- Probleme practice
- 20 modele de teste ce conțin itemi cu note și bareme de notare
- Itemi cu note
- Soluții, indicații, răspunsuri și comentarii la problemele propuse

EDITURA TAIDA

- IAȘI -

Cuprins

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

Bre- Enun- Solu-
viar țuri ții
3

Introducere

Capitolul I. TESTE INIȚIALE. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

	Testul 1. Testul 2	8	294
	Operații cu numere naturale	10	11 294

Capitolul II. MULȚIMI

II.1.	Propoziții adevărate și propoziții false. „Cel mult“, „cel puțin“, „sau“, „și“, „nu“, „dacă - atunci“	16	18 295
II.2.	Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumerică. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite; relația dintre un element și o mulțime; mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale (\mathbb{N} și \mathbb{N}^*)	21	23 296
II.3.	Relații între mulțimi. Relația de incluziune; submulțimi	25	27 297
II.4.	Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență	29	31 297
II.5.	Mulțimi. Exerciții și probleme recapitulative	34	298
	Testul 3. Testul 4. Testul 5	37	299

Capitolul III. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1.	Recapitulare și completări	39	40 299
III.2.	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	41	42 300
III.3.	Determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c); numere prime între ele	43	46 300
III.4.	Determinarea celui mai mic multiplu (c.m.m.m.c.); relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.	48	50 301
III.5.	Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	52	53 302
	Testul 6	56	303

Capitolul IV. RAPOARTE. PROPORȚII

IV.1.	Rapoarte	57	58 303
IV.2.	Procente; probleme în care intervin procente	61	63 304
	Testul 7	68	305
IV.3.	Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; proporții derivate; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	69	72 305
IV.4.	Mărimi direct proporționale; Șir de rapoarte egale; regula de trei simplă .	75	76 306
IV.5.	Mărimi invers proporționale; regula de trei simplă	79	81 307
IV.6.	Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității; reprezentarea cu ajutorul unor soft-uri matematice	83	84 307
IV.7.	Probabilități (aplicații la rapoarte)	88	90 308
IV.8.	TESTE RECAPITULATIVE. Testul 8. Testul 9. Testul 10	92	309

Capitolul V. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

V.1.	Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul (valoarea absolută) a unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi	95	98 309
------	--	----	--------

V.2.	Adunarea numerelor întregi; proprietăți	101	104	310
V.3.	Scăderea numerelor întregi	105	106	310
V.4.	Înmulțirea numerelor întregi; proprietăți. Mulțimea multiplilor unui număr întreg	108	109	311
V.5.	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului. Mulțimea divizorilor unui număr întreg	111	112	311
V.6.	Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri	114	115	312
V.7.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	117	117	312
V.8.	Ecuatii, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor în contextul mulțimii numerelor întregi	119	120	312
V.9.	Inecuații în contextul mulțimii numerelor întregi	122	123	313
	Testul 11		124	314

Capitolul VI. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

VI.1.	Număr rațional; mulțimea numerelor raționale; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; modulul (valoarea absolută); $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr rațional (extinderi)	125	133	314
VI.2.	Adunarea numerelor raționale	140	144	316
VI.3.	Scăderea numerelor raționale	149	150	318
VI.4.	Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți	155	157	320
VI.5.	Împărțirea numerelor raționale	161	162	321
VI.6.	Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul; reguli de calcul cu puteri	166	167	323
VI.7.	Compararea și ordonarea numerelor raționale	171	171	324
VI.8.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	175	177	325
VI.9.	Ecuatii de tipul: $x + a = b$; $x - a = b$; $a \cdot x = b$; $x : a = b$, $a \in \mathbb{Q}^*$	182	183	327
VI.10.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	187	189	328
VI.11.	TESTE RECAPITULATIVE. Testul 12. Testul 13. Testul 14		193	329

GEOMETRIE

Capitolul I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

I.1.	Recapitulare și aprofundare	196	196	330
	Testul 15		198	331
I.2.	Unghiuri opuse la vârf, congruența lor	199	200	331
I.3.	Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi; construcția bisectoarei unui unghi	202	203	331
I.4.	Unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor, unghiuri suplimentare, unghiuri complementare	207	208	332
I.5.	Drepte paralele (definiție, notație, construcție intuitivă prin translație); axioma paralelelor; criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă); aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	212	214	333
I.6.	Drepte perpendiculare (definiție, notație, construcție); oblice; aplicații în poligoane și corpuri geometrice, distanța de la un punct la o dreaptă	218	220	334

I.7.	<i>Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; simetria față de o dreaptă</i>	222	225	335
I.8.	<i>Cerc (definiție, construcție); elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc; unghi la centru; măsuri</i>	228	230	335
I.9.	<i>Pozițiile unei drepte față de un cerc; pozițiile relative a două cercuri</i>	232	233	336
	<i>Testul 16. Testul 17</i>		235	336

Capitolul II. TRIUNGHIUL

II.1.	<i>Triunghi; definiție, elemente, clasificare; perimetru</i>	237	238	337
II.2.	<i>Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi, unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior</i>	240	241	337
II.3.	<i>Construcția triunghiurilor: cazurile L.U.L., U.L.U., L.L.L.; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție)</i>	245	247	339
II.4.	<i>Bisectoarele unghiurilor unui triunghi, concurența bisectoarelor (fără demonstrație)</i>	248	249	339
II.5.	<i>Mediatoarele laturilor unui triunghi, concurența mediatoarelor (fără demonstrație)</i>	250	251	339
II.6.	<i>Înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurența înălțimilor (fără demonstrație)</i>	252	253	340
II.7.	<i>Medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurența medianelor (fără demonstrație)</i>	255	256	340
II.8.	<i>Congruența triunghiurilor oarecare: criteriile de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU. Metoda triunghiurilor congruente</i>	257	260	341
	<i>Testul 18</i>		268	345
II.9.	<i>Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi</i>	269	269	345
II.10.	<i>Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment</i>	270	271	345
II.11.	<i>Proprietățile triunghiului isoscel</i>	272	275	346
II.12.	<i>Proprietățile triunghiului echilateral</i>	279	281	348
II.13.	<i>Proprietăți ale triunghiului dreptunghic</i> - <i>cateta opusă unghiului de 30° – teorema directă și reciprocă;</i> - <i>mediana corespunzătoare ipotenuzei – teorema directă și reciprocă</i> ...	284	286	350
	<i>Testul 19. Testul 20</i>		288	351
II.14.	<i>Teorema lui Pitagora (fără demonstrație, verificări de triplete de numere pitagorice, determinarea de lungimi folosind pătratele unor numere naturale)</i>	290	292	352
REZULTATE. INDICAȚII. SOLUȚII. COMENTARII				294
Bibliografie selectivă				353

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

TESTE INIȚIALE. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

TESTE INIȚIALE

TESTUL 1 (inițial)

Partea I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

1. Rezultatul calculului: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ este:
A. 36; B. 72; C. 18; D. 70. (5p)
2. Rezultatul calculului: $11 + 2[3 + (4 + 5 \cdot 6) : 2] : 5 - 13$ este:
A. 8; B. 4; C. 6; D. 10. (5p)
3. Dacă $ab + ac + ad + ae = 750$ și $b + c + d + e = 25$, atunci $a = \dots$
A. 50; B. 75; C. 30; D. 25. (5p)
4. Dacă fracția $\frac{5+n}{8}$ unde $n \in \mathbb{N}$, este subunitară, atunci $n = \dots$
A. $\{0; 1; 2; 3\}$; B. $\{1; 2; 3\}$; C. $\{0; 1\}$; D. $\{0; 1; 2\}$. (5p)
5. Dacă $14 + 2x = 20$, atunci x este egal cu ...
A. $\{3\}$; B. $\{0; 3\}$; C. $\{6\}$; D. $\{2\}$. (5p)
6. Dacă $3,5x - 0,75 = 2,5x + 3,25$, atunci x este egal cu ...
A. 4,25; B. 2; C. 4,50; D. 4. (5p)
7. Dacă $a = 0,13$ mm, atunci $a = \dots$ cm.
A. 0,0013 cm; B. 1,3 cm; C. 0,013 cm; D. 0,31 cm. (5p)
8. Rezultatul calculului: $3,5 \cdot 0,02 + 5,6 \cdot 0,1$ este egal cu ...
A. 0,53; B. 0,63; C. 1,63; D. 0,063. (5p)

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

1. Suma de 3750 lei a fost plătită în bancnote de 50 lei sau 100 lei.
a) Care este numărul maxim de bancnote cu care s-a plătit această sumă?
b) Dar numărul minim? (10p)
2. Aflați numerele naturale a și b știind că: **a)** $5a + 4b = 60$; **b)** $(a + 7) \cdot (b + 2) = 48$.
(20p)
3. Un tren personal parcurge distanța dintre două localități în 15 ore, iar un tren accelerat în 10 ore. Peste câte ore se vor întâlni cele două trenuri, dacă pornesc simultan din cele două localități, unul către celălalt? (10p)
4. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 13 dă restul 4 și împărțit la 23 dă restul 3. (10p)

Timp de lucru 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CAPITOLUL II

MULȚIMI

II.1. Propoziții adevărate și propoziții false.

„Cel mult“, „cel puțin“, „sau“, „și“, „nu“, „dacă - atunci“

Ce este propoziția în matematică?

Șase elevi din clasă fac următoarele afirmații referitoare la numărul 64.

Victor: „Numărul 64 este pătrat perfect.“

Elena: „Numărul 64 este par.“

Oana: „Numărul 64 se divide cu 16.“

Gigel: „Numărul 64 este cubul unui număr natural.“

Ionuț: „Numărul 64 este divizibil cu 5.“

Ana: „Numărul 64 are trei cifre.“



Să observăm:

Afirmațiile elevilor: Victor, Elena, Oana și Gigel sunt adevărate, iar cele ale elevilor Ionuț și Ana sunt false.



Să exersăm:

Scrieți 4 propoziții adevărate și 3 propoziții false.



Observație: Ada afirmă: „Afară plouă.“ Această propoziție, deși este utilizată în limbajul cotidian, conține anumite neclarități: de pildă, nu știm dacă ne aflăm la polul nord sau la ecuator sau la ce anotimp se referă (toamna, iarna, primăvara, vara) etc.



Să reținem!

- ⇒ Numim propoziție logică, un enunț care este adevărat sau fals.
- ⇒ Propozițiile exclamative și cele interogative nu sunt propoziții logice (nu putem afirma cu certitudine dacă sunt adevărate sau false).

Exemple:

Propozițiile: „ $3 + 9 = 12$ “; „ $3 + 7 < 12$ “; „ $2^5 < 40$ “ sunt propoziții logice.

Propozițiile p_1 : „În ce an a murit Ștefan cel Mare?“; p_2 : „Afară ninge.“; p_3 : „Merg la teatru.“ nu sunt propoziții logice pentru că nu putem afirma despre ele că sunt propoziții adevărate sau false.

Ce semnificație au cuvintele: „cel mult“, „cel puțin“

Să observăm:

Care dintre propozițiile următoare sunt adevărate?

1. Victor: „Ecuația $3 + x = 9$ are **cel mult** o soluție număr natural.“
2. Nicu: „Inecuația $2^x < 16$ are **cel puțin** două soluții numere naturale.“
3. Alex: „Inecuația $x + 5 < 14$ are **cel puțin** 4 soluții, numere naturale.“
4. Ada: „Există **cel puțin** 6 cifre pare în sistemul zecimal de numerație.“
5. Ana: „Există **cel mult** 4 cifre impare în sistemul zecimal.“

Propozițiile **1, 2, 3** sunt propoziții adevărate, iar propozițiile **4 și 5** sunt false.

Să rezolvăm:

Aflați în fiecare caz numerele naturale:

- a) divizibile cu 5 care sunt cel puțin egale cu 19 și mai mici decât 40;
- b) divizibile cu 2 și cel mult egale cu 10;
- c) cel mult egale cu 7;
- d) cel puțin egale cu 2^3 și mai mici decât 15.



II.2. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumerică. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite; relația dintre un element și o mulțime; mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale (\mathbb{N} și \mathbb{N}^*)

Să împărțim cartonașele

- ❖ Luăm un plic P în care punem 20 de cartonașe pe care sunt scrise numerele naturale de la 1 la 20.
 - ❖ Apoi mai luăm 3 plicuri P_1, P_2, P_3 .
 - ❖ În plicul P_1 punem cartoanele din P care au pe ele scrise numerele pare.
 - ❖ În plicul P_2 punem cartonașele din P care au pe ele scrise numerele impare multipli de 3.
 - ❖ În plicul P_3 punem cartonașele care au pe ele scrise numere de două cifre ce au exact doi divizori.
 - ❖ După aceste operații enumerăm în paranteze acolade, numerele de pe cartonașele din P_1, P_2 și P_3 .
- Avem: $P_1: \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$.
 $P_2: \{3; 9; 15\}$.
 $P_3: \{11; 13; 17; 19\}$.

Au mai rămas cartonașe în plicul P?

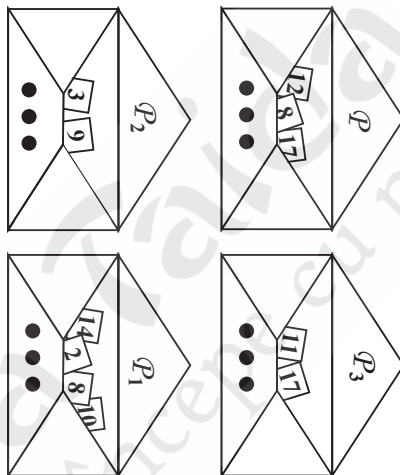
Ce numere conțin pe ele?

Mai luați un plic P_4 și așezați în el cartonașele rămase.

Obținem: $P_4: \{1; 5; 7\}$.

Spunem că mulțimea cartonașelor din plicul P am împărțit-o în patru mulțimi.

Prin **mulțime** înțelegem o colecție (grămadă, ansamblu de obiecte distincte).



Exemple:

- ♦ Mulțimea cifrelor arabe din sistemul zecimal de numerație: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
- ♦ Mulțimea elevilor din clasa noastră.
- ♦ Mulțimea numerelor naturale de două cifre.
- ♦ Mulțimea literelor cuvântului „apartament”.
- ♦ Mulțimea cifrelor numărului 12378.
- ♦ Mulțimea continentelor.



Rețineți:

- ➔ O **mulțime** conține elemente.
- ➔ Elementele pot fi numere, litere, obiecte, fenomene, animale, persoane etc.
- ➔ Nu are importanță numărul elementelor într-o mulțime.
- ➔ Un element apare într-o mulțime o singură dată.

Cum notăm mulțimile și elementele lor?

Mulțimile se notează cu litere mari de tipar din alfabetul latin: A, B, C, ..., M, N, P, ..., X, Y, Z.
 Dacă un obiect face parte dintr-o mulțime, spunem că acesta **aparține** acelei mulțimi.

Exemple:

Dacă notăm cu A mulțimea literelor cuvântului „apartament” spunem că a este un element al mulțimii A, iar o nu este un element al mulțimii A.

Scrim:

$a \in A$
 $o \notin A$

Spunem:

a aparține mulțimii A
 o nu aparține mulțimii A.

Ce este intersecția a două mulțimi?

2. Mulțimea hobby-urilor în comun ale Alinei și Bogdan, muzica și filatelia reprezintă **intersecția** mulțimilor A și B.

Notăm:

$$A \cap B$$

Citim:

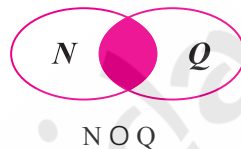
Mulțimea A intersectată cu mulțimea B.



Să reținem!

Intersecția a două mulțimi N și Q este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi.

$$N \cap Q = \{y \mid y \in N \text{ și } y \in Q\}.$$



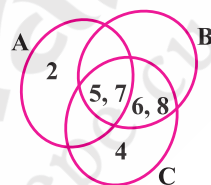
Observație:

Doa mulțimi care au intersecția mulțimea vidă le numim **mulțimi disjuncte**.



Să exersăm:

Fie mulțimile: $A = \{2; 5; 7\}$; $B = \{5; 6; 7; 8\}$; $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.
Calculați: $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$.



Rezolvare:

$$A \cap B = \{5; 7\}; A \cap C = \{5; 7\}; B \cap C = \{5; 6; 7; 8\}.$$

$$A \cap B \cap C = \{5; 7\}.$$

Ce este diferența a două mulțimi?

3. Mulțimea hobby-urilor pe care le are doar Alina, nu și Bogdan, reprezintă diferența mulțimilor A și B.

Notăm:

$$A - B$$

A minus B sau diferența dintre A și B.

4. Mulțimea hobby-urilor pe care le are doar Bogdan, nu și Alina reprezintă diferența mulțimilor B și A.

Notăm:

$$B - A$$

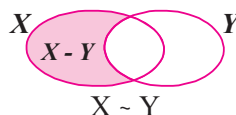
B minus A sau diferența dintre B și A.



Să reținem!

Diferența a două mulțimi, X și Y, este mulțimea colorată, formată din elementele care aparțin mulțimii X și nu aparțin mulțimii Y.

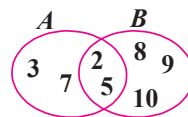
$$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ și } x \notin Y\}.$$



Să exersăm:

Se dau mulțimile: $A = \{2; 3; 5; 7\}$; $B = \{2; 5; 8; 9; 10\}$.
Calculați: $A - B$; $B - A$.

Rezolvare: $A - B = \{3; 7\}$; $B - A = \{8; 9; 10\}$.



Să recapitulăm:

Operația	Notația	Definiția	Diagrama
Reuniunea	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$	
Intersecția	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$	
Diferența	$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$	

TEST 14* (test grilă)

1. Rezultatul calculului: $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{10}{8}$ este: **A)** $2\frac{1}{8}$; **B)** 2; **C)** $1\frac{7}{8}$; **D)** 3. (5p)(nota 5)
2. Forma zecimală a fracției $\frac{7}{5}$ este: **A)** 1,4; **B)** 1,5; **C)** 1,41; **D)** 1,42. (5p)(nota 5)
3. A 7-a zecimală a numărului 10,1(2345) este: **A)** 4; **B)** 6; **C)** 2; **D)** 3. (5p)(nota 5)
4. Rezultatul calculului $(0,25^4 : 0,25^3) \cdot 200$ este: **A)** 40; **B)** 50; **C)** 100; **D)** 25. (5p)(nota 5)
5. Rezultatul calculului: $\left(\frac{3}{8}\right)^2 : \frac{9}{64}$ este egal cu: **A)** 2; **B)** 3; **C)** 1; **D)** 4. (10p)(nota 5)
6. Un teren agricol de formă pătratică are lungimea laturii egală cu $12\frac{1}{4}$ m. Aria pătratului este egală cu: **A)** $\frac{2401}{16}$ dm²; **B)** 144,25 m²; **C)** $\frac{2401}{16}$ cm²; **D)** 150,625 m². (10p)(nota 5)
7. Elena a cumpărat $6\frac{3}{4}$ kg de mere, iar sora sa Ana, a cumpărat cu 2,5 kg mai puțin. Cele două surori au cumpărat împreună: **A)** 9,25 kg; **B)** 11 kg; **C)** 10,75 kg; **D)** 9,50 kg. (5p)(nota 7)
8. Victor se gândește la un număr pe care-l triplează și scade din rezultat o doime din număr și obține 80. Victor s-a gândit la numărul: **A)** 16; **B)** $32\frac{1}{2}$; **C)** 32; **D)** 64? (10p)(nota 7)
9. Numărul rațional cu $2\frac{1}{3}$ mai mare decât produsul numerelor $5\frac{5}{6}$ și $\frac{2}{7}$ este: **A)** 4; **B)** $\frac{35}{9}$; **C)** $\frac{102}{42}$; **D)** 6. (5p)(nota 7)
10. Efectuând calculele $\left[15 + 17 : \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right)\right] \cdot 2\frac{11}{45}$ se obține: **A)** 101; **B)** 105; **C)** 99; **D)** $101\frac{1}{3}$. (10p)(nota 9)
11. Soluția ecuației $\frac{3}{8}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}x + 2,5$ este **A)** $35\frac{1}{6}$; **B)** $40\frac{1}{2}$; **C)** 40; **D)** $40\frac{1}{6}$. (10p)(nota 9)
12. Pătratul unui număr rațional este cu 0,1875 mai mic decât numărul respectiv. Numărul este: **A)** 1,35; **B)** 2,5; **C)** 0,55; **D)** 0,75. (10p)(nota 10)

Timp de lucru: 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.

* La aceste probleme numai un răspuns este corect!

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

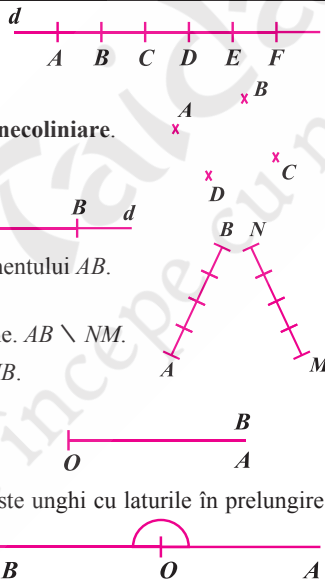
I.1. Recapitulare și aprofundare

Să ne amintim:

- Punctele situate pe aceeași dreaptă se numesc puncte **coliniare**.
- Punctele care nu sunt situate pe aceeași dreaptă se numesc puncte **necoliniare**.
- Punctele A, B, C, D sunt necoliniare.
- Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
- **Distanța** dintre două puncte A și B , notată AB , este lungimea segmentului AB .
- Două segmente AB și CD sunt **congruente** dacă au aceeași lungime. $AB \setminus NM$.
- Punctul M este **mijlocul** segmentului AB dacă $M \in AB$ și $MA \setminus MB$.



- Unghiul AOB este unghi nul dacă semidreptele OA și OB coincid.
- Dacă semidreptele OA și OB sunt opuse, atunci unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi cu laturile în prelungire sau unghi **alungit**.
- Unghiul care nu e nici alungit, nici nul se numește **unghi propriu**.
- Două unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt congruente dacă au aceeași măsură $\sphericalangle AOB \setminus \sphericalangle COD$.

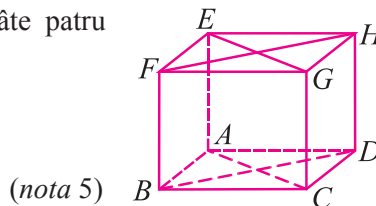


EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Se dau 9 puncte distincte două câte două, dintre care exact 4 sunt coliniare, iar celelalte sunt oricare trei, necoliniare. Câte drepte determină cele 8 puncte? (nota 5)

2. În paralelipipedul din figura alăturată numiți câte patru exemple de:

- perechi de drepte paralele;
- perechi de drepte necoplanare;
- trei drepte concurente;
- segmente congruente.



3. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare în această ordine. Dacă $AB = 25$ cm; $BD = 82$ cm și $CD = 40$ cm, calculați lungimile segmentelor BC, AC și AD . (nota 5)

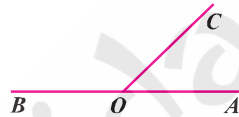
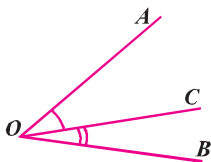
4. Lungimea unui dreptunghi este cu 20 cm mai mare decât lățimea lui. Dacă perimetrul dreptunghiului este egal cu 120 cm, aflați lungimile laturilor dreptunghiului. (nota 5)

I.3. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi; construcția bisectoarei unui unghi

Ce înțelegem prin unghiuri adiacente?

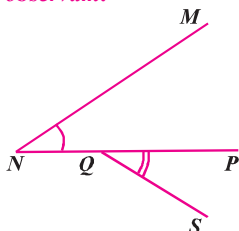
Să reținem!

- Unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$ din figura alăturată au:
 - vârful O comun;
 - latura $[OC$ comună;
 - laturile $[OA$ și $[OB$ sunt situate de o parte și de alta a laturii comune $[OC$.

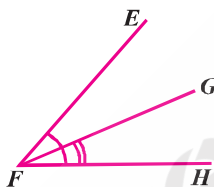


➤ Spunem că unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$ sunt **adiacente**.

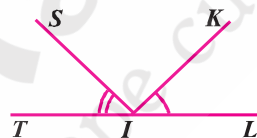
Să observăm:



- $\sphericalangle MNP$ și $\sphericalangle PQS$
(nu au același vârf)



- $\sphericalangle EFH$ și $\sphericalangle HFG$
(laturile necomune $(FE$ și $(FG$ nu se află de o parte și de alta a laturii comune $FH)$)

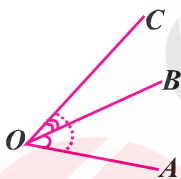
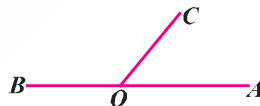


- $\sphericalangle KIL$ și $\sphericalangle LIS$
(nu au o latură comună)

Concluzie: În cele trei cazuri, perechile de unghiuri precizate nu sunt adiacente.

Rețineți!

- Două unghiuri adiacente cu laturile necomune în prelungire sunt **suplementare**.



Să rezolvăm:

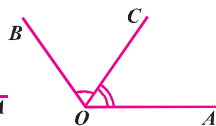
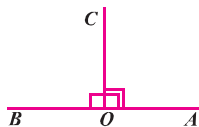
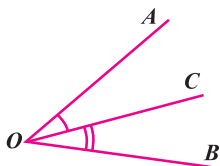
În figura alăturată măsura unghiului $\sphericalangle AOC$ reprezintă *suma* măsurilor unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și a $\sphericalangle BOC$, iar măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ reprezintă *diferența* măsurilor unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$.

Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ au măsurile de 35° și, respectiv, 40° construieți cu raportorul și rigla negradată unghiul *sumă* și unghiul *diferență*.

Ce este bisectoarea unui unghi?

Să observăm:

În fiecare caz din figurile alăturate, semidreapta $[OC$ interioară unghiului nenul $\sphericalangle AOB$ formează cu laturile lui, unghiuri congruente.



Să reținem!

☞ Semidreapta interioară unui unghi, cu originea în vârful lui, care formează cu laturile sale două unghiuri congruente se numește **bisectoarea unghiului**.

Cum construim bisectoarea unui unghi?

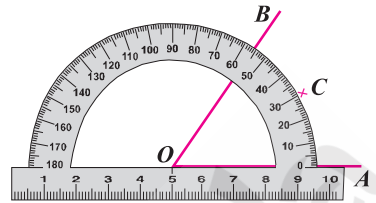
Să observăm:

Pas 1. Aflăm cu ajutorul raportorului măsura unghiului $\angle AOB$.

Pas 2. Fixăm punctul C astfel încât $m(\angle BOC) = \frac{m(\angle AOB)}{2}$.

Pas 3. Construim cu rigla semidreapta $[OC$.

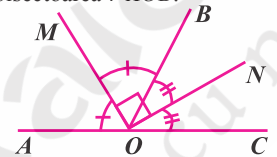
Exemplu: Dacă $m(\angle AOB) = 112^\circ$. Cum $112^\circ : 2 = 56^\circ$, construim cu raportorul (așezat cu centrul în punctul O), punctul C în dreptul diviziunii de 56° . Semidreapta $[OC$ este bisectoarea $\angle AOB$.



Probleme rezolvate:

1. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare.

Fie $\angle AOB$ și $\angle BOC$ cele două unghiuri adiacente suplementare, iar $[OM$ și $[ON$ respectiv, bisectoarele lor.



Din $[OM$ bisectoarea $\angle AOB$ și $[ON$ bisectoarea $\angle BOC$ rezultă că $m(\angle MOB) = \frac{m(\angle AOB)}{2}$ și

$$m(\angle BON) = \frac{m(\angle BOC)}{2}. \text{ Însă } m(\angle MOB) + m(\angle BON) = m(\angle MON) \text{ rezultă că } m(\angle MON) =$$

$$= \frac{m(\angle AOB)}{2} + \frac{m(\angle BOC)}{2} = \frac{m(\angle AOC)}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Rețineți! Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare este de 90° .

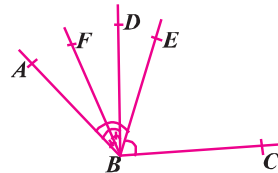
2. Fie semidreptele $[BA$, $[BD$ și $[BC$ astfel încât unghiurile $\angle ABD$ și $\angle DBC$ să fie adiacente iar $m(\angle ABC) - m(\angle ABD) = 90^\circ$. Să se arate că unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ și $\angle ABD$ este constant.

Rezolvare:

Notăm $m(\angle ABD) = 2x$, atunci $m(\angle ABC) = 90^\circ + 2x$.

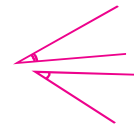
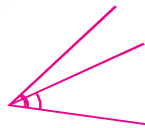
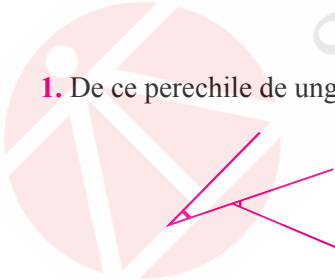
Unghiul format de cele două bisectoare va avea măsura

$$\frac{2x + 90^\circ}{2} - \frac{2x}{2} = 45^\circ = \text{constant.}$$



EXERCITII ȘI PROBLEME

1. De ce perechi de unghiuri din figura de mai jos nu sunt adiacente?



(nota 5)

2. Se dau următoarele perechi de unghiuri adiacente:

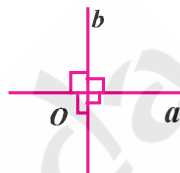
a) $m(\angle AOB) = 110^\circ 35' 40''$, $m(\angle BOC) = 69^\circ 24' 20''$; **b)** $m(\angle AOB) = 104^\circ 15' 23''$, $m(\angle BOC) = 76^\circ 23' 42''$; **c)** $m(\angle AOB) = 42^\circ 17'$, $m(\angle BOC) = 118^\circ 43'$. Stabiliți dacă semidreptele $(OA$ și $(OC$ sunt în prelungire sau nu. În cazul când nu sunt în prelungire, aflați cu cât trebuie mărită sau micșorată măsura unuia din unghiurile date ca laturile lor necomune să fie în prelungire.

(nota 5)

I.6. Drepte perpendiculare (definiție, notație, construcție); oblice; aplicații în poligoane și corpuri geometrice, distanța de la un punct la o dreaptă

Să recapitulăm:

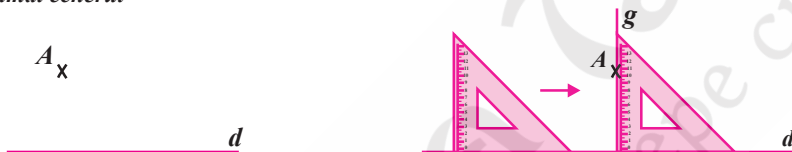
- Prin plierea unei foi de hârtie de două ori, astfel încât părțile suprapuse să coincidă de fiecare dată se obțin patru unghiuri drepte. Cele două drepte astfel obținute se vor numi **drepte perpendiculare** (figura alăturată).
- Dacă dreptele a și b sunt perpendiculare, atunci notăm $a \perp b$, în caz contrar vom nota $a \not\perp b$.



Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct exterior acesteia?

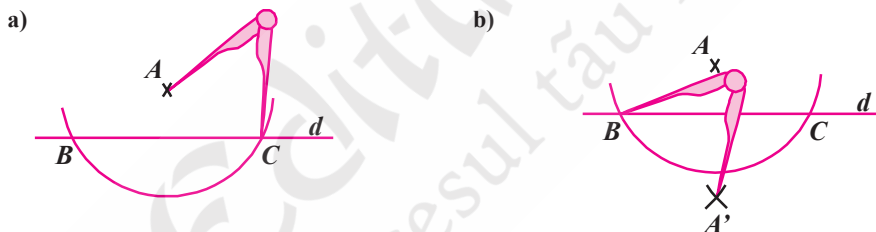
Fie dreapta d și punctul A , unde $A \notin d$.

Utilizând numai echerul



Am așezat echerul cu o catetă pe dreapta d și apoi l-am deplasat de-a lungul dreptei d până când cealaltă catetă a echerului conține punctul A , după care trasăm dreapta g (figura alăturată).

Utilizând compasul și o riglă negradată



Pasul 1: Fixăm vârful ascuțit al compasului în punctul A și cu o deschidere suficient de mare, descriem un arc de cerc care să intersecteze dreapta d în două puncte distincte B și C (figura a) de mai sus).

Pasul 2: Fixăm vârful ascuțit al compasului în punctul B și apoi în punctul C cu aceeași deschidere și trasăm câte un arc de cerc situate în semiplanul determinat de dreapta d care nu conține punctul A (figura b) de mai sus).

Fixăm punctul A' în care se intersectează cele două arce de cerc.

Dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta d , adică $AA' \perp d$.

Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct care aparține dreptei? ($A \in d$)



ALGEBRĂ. CAPITOLUL I. TESTE INITIALE. RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

TESTUL 1 I. 1. A. 2. C. 3. C. 4. D. 5. A. 6. D. 7. C. 8. B. II. 1. a) 75; b) 38.

2. a) $(a, b) \in \{(0,15), (4,10), (8,5), (12,0)\}$; b) $(a, b) \in \{(1,4), (5,2), (9,1), (17,0)\}$. 3. 6 ore.

4. Conform teoremei împărțirii cu rest avem relațiile: $n = 13a + 4$ și $n = 23b + 3$, de unde $n = 13b + (10b + 3)$ și $13b + (10b + 3) = 13a + 4$. Deci $13/10b - 1$, b minim implică $b = 4$ și $n = 95$.

TESTUL 2 I. 1. C. 2. B. 3. D. 4. A. 5. C. 6. D. 7. B. 8. B. 9. C. II. 1. 4027. 2. Un elev cheltuie 2,6 lei + 1,4 lei = 4 lei, iar toți elevii cheltuie 4 lei · 24 = 96 lei. 3. 7,1. 4. 120 de sticle.

I. Operații cu numere naturale 1. a) 5211; b) 3645; c) 4928; d) 1015; e) 1712; f) 1158;

g) 677; h) 79412; i) 319; j) 13489; k) 386; l) 38254; m) 45428; n) 6834; o) 2502. 2. a) $(27 + 63) + (58 + 42) = 100 + 100 = 200$; b) $7835 + (749 + 251) = 7835 + 1000 = 8835$ etc. 3. Fie a, b, c cele trei numere. Avem relațiile: $a + b + c = 750$; $a + b = 384$ și $b + c = 492$, de unde $a + b + b + c =$

$= (a + b + c) + b = 876$, deci $b = 876 - 750 = 126$. $a = 384 - 126 = 258$ și $c = 492 - 126 = 366$.

4. Numărul cel mic (scăzătorul) este egal cu $5182 - 4387 = 795$. Suma numerelor este 5977.

5. a) $x = 482 - 352 = 130$; b) $x = 1000 - 382 = 618$; c) $x = 478 + 123 = 601$; d) $x = 500 - 150 = 350$;

e) $x = 1500 - 831 = 669$; f) $x = 7132 + 389 = 7521$. 6. a) 1242; b) 700; c) 16362; d) 11663;

e) 4305; f) 86944; g) 826496; h) 187500; i) 416; j) 308; k) 20; l) 795. 7. $25 \cdot 6 \cdot 20 = 3000$ l apă.

8. a) baza 5, exponentul 3; c) baza 7, exponentul 0; ...; i) nu are sens. 9. a) 7^2 ; b) 10^0 ; c) 10^{10} ;

d) 0^1 ; e) nu are sens; f) 3^2 ; g) 2012^{2013} ; h) 8^0 . 10. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; 512, 1024, 2048, 4096; b) 0, 1, 1, 2000; c) 512, 1728, 81, 1000, 10000, 729; d) 2187, 121, 196, 27000, 15625, 303, 1; e) 512, 144, 15129, 0, 1, 1; f) 243, 729, 1331, 169, 62500; g) 25, 125, 625, 225, 3375; h) 49, 343, 2401, 289, 4913; i) 36, 216, 1296, 256, 4096; j) 64, 324, 784, 1444, 2304;

k) 81, 361, 841, 1521, 2401; l) 10201, 10404, 10609, 10816, 1000000. 11. a) 16; b) 32; c) 85;

d) 160; e) 400; f) 68; g) 240; h) 144; i) 720; j) 680; k) 840; l) 234; m) 260; n) 1300; o) 800;

p) 400. 12. a) 14; b) 9; c) 40; d) 169; e) 64; f) 224; g) 1225; h) 324; i) 4. 13. a) $9 - 8 + 1 = 2$;

b) $64 - 32 + 1 = 33$; c) $343 - 64 - 9 = 270$; d) $14^2 = 196$; e) $(7 + 4 - 1)^2 = 100$; f) $5^3 - 1 = 124$;

g) $49 - 25 - 16 = 8$; h) $64 - 32 - 16 = 16$; i) $81 - 27 - 9 - 3 - 1 = 41$. 14. a) $9 + 361 + 484 = 36 +$

$+ 289 + 529$ etc. 15. c) $(3 \cdot 11)^2 + (4 \cdot 11)^2 = (5 \cdot 11)^2 \Leftrightarrow (3^2 + 4^2)11^2 = 5^2 \cdot 11^2$; d) $(3 \cdot 111)^2 +$

$+ (4 \cdot 111)^2 = (5 \cdot 111)^2 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 111^2 + 4^2 \cdot 111^2 = 5^2 \cdot 111^2$; e) $(3 \cdot 1111)^2 + (4 \cdot 1111)^2 =$

$= (5 \cdot 1111)^2$ etc. 16. a) $2^5 > 2^3$; b) $4^7 < 6^7$; c) $4^2 = 2^4$; d) $4^3 = 2^6$; e) $4^3 = 8^2$; f) $5^3 > 10^2$; g) $11^2 < 2^7$;

h) $10^2 < 11^2$; i) $3^5 = 243$ și $2^8 = 256$, deci $3^5 < 2^8$. 17. a) 31; b) 59; c) 26; d) 33; e) 128; f) 483;

g) 15; h) 11; i) 1452; j) 23; k) 158; l) 1200. 18. a) câțul 28, restul 6; b) câțul 40, rest 3; c) câțul

135, rest 18; d) câțul 778, rest 26; e) câțul 121, rest 13; f) câțul 41, rest 500; g) câțul 151, rest

14; h) câțul 30, rest 92; i) câțul 98, rest 238. 19. Fie a și b cele două numere. Avem $a = 20b + 5$

și $a + b = 152$, de unde $20b + 5 + b = 152$, adică $b = 7$ și $a = 145$. 20. 1664 și 15. 21. nu,

deoarece $15 \nmid 220$. 22. 1200 și 200. 23. Conform teoremei împărțirii cu rest avem: $a = 15 \cdot 6 + r$,

unde $r < 6$. Se obțin numerele: 90, 91, 92, 93, 94, 95. Sunt șase numere. 24. Cel mai mic

număr este $207 = 9 \cdot 23$ și cel mai mare este $792 = 9 \cdot 88$. Deci sunt $88 - 22 = 66$ de numere.

25. a) $2000 = (9 : 9 + 999) \cdot (9 + 9) : 9$; b) $2000 = 333 \cdot (3 + 3) + (3 + 3) : 3$.

26. a)

t	0	1	3	2	2 h 40 min	3 h 20 min
d	0	45	15	30	20	10

27. Dacă numărul porților este x , la prima poartă deținutul face cel mult x încercări, face un semn la cheia folosită, la a doua poartă face cel mult $x - 1$ încercări etc. În total, face cel mult

Bibliografie selectivă

- [1]. BĂLĂUCĂ, A. și colaboratorii. *Matematica în sprijinul elevilor din clasele V-VIII pentru concursurile școlare*, Universitatea „Al. I. Cuza” Iași, 1989
- [2]. BĂLĂUCĂ, A., ȚICALO, I. *Matematica în sprijinul elevilor din clasele V-VIII pentru concursurile școlare*, Botoșani, Alpha, 1991
- [3]. BĂLĂUCĂ, A., ȚICALO, I. *Probleme semnificative pentru concursurile școlare*, Partea I, *Aritmetică și algebră, clasele V-VI*, Editura REMOS, Chișinău, 1995
- [4]. BĂLĂUCĂ, A., ȚICALO, I. *Probleme semnificative pentru concursurile școlare, Partea a III-a, Geometrie plană. Clasele VI-VIII*, Editura REMOS, Chișinău, 1995
- [5]. BĂLĂUCĂ, A., și colaboratorii. *Aritmetică, Clasa a V-a*, Editura Taida, Iași, 2016
- [6]. BĂLĂUCĂ, A., și colaboratorii. *Aritmetică. Algebră. Geometrie. Auxiliar la manualele alternative – clasa a VI-a*, Editura Taida, Iași, 2016
- [7]. BĂLĂUCĂ, A. *Aritmetică. Algebră. Geometrie. Olimpiade, concursuri și centre de excelență*, clasa a VI-a, Editura Taida, Iași, 2016
- [8]. BRÂNZEI, D., ANIȚA, S., ANIȚA, A.. *Competență și performanță în geometrie, vol. I, Relații metrice*, Editura MINIED, Iași, 1992
- [9]. BRÂNZEI, D., ANIȚA, S., ANIȚA, A.. *Competență și performanță în geometrie, vol. II, Funcții geometrice*. Editura MINIED, Iași, 1992
- [10]. EDWIN MOISE, FLOYD, I., DOWNS, Jn., *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
- [11]. GAUTIER, C., GIRARD, G. GERLL, D., THEIRCÉ, C., WARUSEA, ALEF, *Algebre*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974
- [12]. MIRON, R. și BRÂNZEI, D., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei, București, 1983
- [13]. POPOVICI, C., *Teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
- [14]. ȚIȚEICA, Gh., *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1984
- [15]. Colecția „*Gazeta Matematică*“, din anii 1964-2018