ARTUR BĂLĂUCĂ
CĂTĂLIN BUDEANU GABRIEL MÎRŞANU

ALGEBRĂ
GEOMETRIE

Clasa a VIII-a

- Itemi cu note
- Modele de teste pentru recapitulare și aprofundare ce conţin itemi cu note şi bareme de notare
- Teste iniţiale
- Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială
- Evaluarea Națională 2014-2016

EDITURA TAIDA
– IAŞI –

INTRODUCERE

Lucrarea compartimentată pe capitole, pe unităţi de învăţare şi chiar pe lecţii grupează elementele de conţinut ale programei şcolare actuale cu respectarea logicii interne de dezvoltare a conceptelor matematice şi oferă atât elevilor, cât şi profesorilor lor un volum de exerciţii şi probleme pe cât de variate, pe atât de originale, care au menirea să-i ajute în abordarea şi completarea manualelor alternative care sunt depăşite de actuala programă şcolară.

Intenţia declarată a autorilor este de a se alinia programei actuale, iar lucrarea se constituie într-un auxiliar ales de colegul nostru „rătăcit“, poate, printre atâtea culegeri de probleme, grupate după anul sau locul în care au fost propuse.

Lucrarea constituie un suport eficient pentru profesori, elevi şi părinţi pentru o evaluare şi o autoevaluare cât mai obiectivă, de aceea fiecare exerciţiu şi problemă are specificată nota corespunzătoare.

Pentru fiecare capitol şi unitate de învăţare au fost selectate probleme semnificative, acordându-se o atenţie sporită pentru acele capitole în care manualele alternative sunt deficitare.

Structura problemelor contribuie la utilizarea lucrării ca un instrument eficient de lucru în tratarea diferenţiată a elevilor în funcţie de posibilităţile intelectuale ale fiecăruia şi de interesul manifestat pentru studiul matematicii. S-a optat pentru probleme semnificative şi eficiente, atât pentru consolidarea cunoştinţelor în diferite etape, cât şi pentru pregătirea testelor de evaluare curentă, semestrială sau finală.

Numeroase probleme cer modelarea matematică a unor fenomene din lumea înconjurătoare, probleme care lipsesc din culegerile actuale şi au un rol important în formarea matematică a elevilor în vederea abordării altor discipline şcolare.

Pentru formarea competenţelor europene specifice studiului matematicii în gimnaziu, lucrarea a fost astfel concepută încât să contribuie la formarea obişnuinţei elevilor de a apela la concepte şi metode matematice în abordarea unor situaţii cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.

*Lucrarea prezintă **25** de teme de sinteză care conţin consideraţii teoretice la noţiunile de bază ale programei ce pot fi utilizate la sistematizarea cunoştinţelor cât şi în activităţile opţionale precum şi numeroase modele de probleme rezolvate şi comentate.*

*De asemenea, lucrarea cuprinde **24** modele de teste respectând criteriile de notare pentru aprofundarea cunoştinţelor şi recapitularea pentru teză precum şi **4** variante pentru lucrarea scrisă pe semestrul I și **4** variante pentru lucrarea scrisă pe semestrul al II-lea, subiectele date la Evaluarea Naţională în perioada 2014-2016; se obţin: **40** de puncte din itemi de nota 5; câte **20** de puncte din itemi de nota 7, respectiv 9; **10** puncte din itemi de nota 10 şi **10** puncte se acordă din oficiu. După prezentarea enunţurilor problemelor propuse urmează soluţii şi comentarii. În general soluţiile prezentate nu sunt exhaustive, lăsând posibilitatea utilizatorului de a contribui efectiv la completări.*

Suntem recunoscători şi adresăm mulţumirile noastre tuturor colaboratorilor, pentru observaţiile, sfaturile şi recomandările de care am beneficiat în redactarea lucrării.

Artur Bălăucă

– CUPRINS –

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. *INTRODUCERE.*

CAPITOLUL II. *RELAŢII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE*

CAPITOLUL III. PROIECŢII ORTOGONALE PE UN PLAN

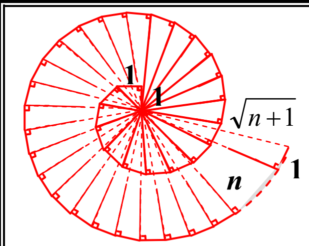
CAPITOLUL IV. *CALCUL DE ARII ŞI VOLUME*

CAPITOLUL V. VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ EVALUARE NAȚIONALĂ (2014 - 2016)

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. NUMERE REALE

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Exerciţii de recunoaştere a numerelor întregi, raţionale, iraţionale



SPIRALA LUI ARHIMEDE

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_{+}$;

$n = 0{,}0200200020000200000200000020000000200000000 2\ldots$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71\ldots$

Observaţii: Ecuaţia $x^2 = 6$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ şi $(m, n) = 1$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 6$. Din $\frac{m^2}{n^2} = 6$ rezultă $m^2 = 6n^2$, de unde $2/m$. Deci $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) şi $4k^2 = 6n^2$ sau $2k^2 = 3n^2$.

1. Cum $(2, 3) = 1$ rezultă $2/n^2$, adică $2/n$. Contradicţie, pentru că $(m, n) = 1$.

2. $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831\ldots$

3. Un număr este **raţional** dacă şi numai dacă se poate scrie sub formă de fracţie zecimală cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.

4. Numărul $0{,}010010001000010000010000001000000001\ldots$ nu este fracţie zecimală periodică. (are o infinitate de zecimale care nu se succed periodic)

5. Un număr este **iraţional** dacă poate fi scris ca o fracţie zecimală cu o infinitate de zecimale dar care nu se succed periodic.

6. Mulţimea numerelor raţionale reunită cu mulţimea numerelor iraţionale formează mulţimea numerelor reale pe care o notăm cu $\mathbb{R}$.

7. Orice număr real pozitiv se reprezintă printr-o fracţie zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1a_2a_3\ldots}$, unde a_0 este **partea întreagă** a lui x şi se notează cu $[x]$, iar $\overline{0, a_1a_2a_3\ldots}$ este **partea fracţionară** a lui x şi se notează $\{x\}$. Avem $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

8. Orice număr real negativ x ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) se reprezintă printr-o fracţie zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1a_2a_3\ldots}$, unde $a_0 - 1$ este partea întreagă a lui x, iar $1 - \overline{0, a_1a_2a_3\ldots}$ este partea fracţionară a lui x. Avem $x = [x] + \{x\}$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = x$ şi $\{x\} = 0$.

Probleme rezolvate:

1. Un număr raţional poate fi reprezentat prin fracţii ordinare echivalente sau printr-o fracţie zecimală finită sau periodică.

Exemple: **a)** $\frac{48}{5}^{2/} = \frac{96}{10} = 9,69$ fracţie **zecimală finită**;

b) $\frac{28}{12}^{\backslash 4} = \frac{7}{3} = 2,33... = 2,(3)$, fracţie **zecimală periodică simplă**;

c) $\frac{125}{12} = 10,41(6)$, fracţie **zecimală periodică mixtă**.

2. Reprezentaţi sub formă de fracţie ordinară fiecare dintre numerele:

a) 2,75; **b)** 0,124; **c)** 3,(4); **d)** 14,(18); **e)** 2,(234); **f)** 0,1(62); **g)** 12,0(45); **h)** 4,1(345).

Rezolvare:

a) $2,75 = \frac{275}{100}^{\backslash 25} = \frac{11}{4}$; **b)** $0,124 = \frac{124}{100}^{\backslash 4} = \frac{31}{25}$; **c)** $3,(4) = 3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$;

d) $14,(18) = 14\frac{18}{99} = 14\frac{2}{11} = \frac{156}{11}$; **e)** $2,(234) = 2\frac{234}{999}^{\backslash 9} = 2\frac{26}{111} = \frac{248}{111}$;

f) $0,1(62) = \frac{162-1}{990} = \frac{161}{990}$; **g)** $12,0(45) = 12\frac{45}{990}^{\backslash 45} = 12\frac{1}{22} = \frac{265}{22}$;

h) $4,1(345) = 4\frac{1345-1}{9990} = 4\frac{1344}{9990}^{\backslash 6} = 4\frac{224}{1665} = \frac{6884}{1665}$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii şi daţi câte un contraexemplu pentru propoziţiile false:

a) „Orice număr întreg este număr natural.“

b) „Orice număr natural este număr întreg.“

c) „Orice număr real este număr iraţional.“

d) „Orice număr întreg este număr real.“

e) „Orice număr real este număr raţional.“

f) „Orice număr întreg este număr raţional.“

g) „Orice număr raţional este număr real.“

h) „Pătratul oricărui număr iraţional este un număr raţional.“

i) „Suma a două numere iraţionale este un număr iraţional.“

Rezolvare:

a) F ($-3 \notin \mathbb{N}$); **b)** A ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$); **c)** F $\left(-\frac{3}{4} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right)$; **d)** A ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$); **e)** F $\left(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\right)$; **f)** A ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$);

g) A ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$); **h)** F $\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7-4\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right)$; **i)** F $\left(\left(2\sqrt{3}+5\right)+\left(5-2\sqrt{3}\right)=10\right)$.

4. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numerele $\sqrt{5n+8}$ şi $\sqrt{5n+7}$ sunt iraţionale.

Rezolvare:

Presupunem că $\sqrt{5n+8} \in \mathbb{N}$. Atunci $5n + 8 = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, deci numărul $5n + 8$ este pătrat perfect. Dar $U(5n + 8) \in \{3;8\}$, contradicţie!

Analog, $U(5n + 7) \in \{2;7\}$ etc.

5. Determinaţi cifrele distincte a şi b în baza zece ştiind că $\sqrt{\overline{4ab}} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$\sqrt{\overline{4ab}} \in \mathbb{N}$ implică $\overline{4xy} = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Însă $20^2 \leq \overline{4ab} \leq 22^2$, de unde $\overline{4ab} \in \{20^2; 21^2; 22^2\}$ şi $\overline{4ab} \in \{400; 441; 484\}$. Cum $a \neq b$ rezultă că $\overline{4ab} \in \{441; 484\}$. Deci $a = 4$, $b = 1$ sau $a = 8$ şi $b = 4$.

6. Arătaţi că numărul $\sqrt{2005^{2012} + 2007^{2011}} \notin \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$U(2005^{2012}) = 5$ şi $U(2007^{2011}) = U(2007^{4 \cdot 502 + 3}) = U(2007^3) = U(7^3) = 3$.

Deci $U(2005^{2012} + 2007^{2011}) = U(5 + 3) = 8$ etc.

7. Arătaţi că numărul $a = \sqrt{5 + 15 + 25 + ... + 2015 + 404^2} \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$a = \sqrt{5(1 + 3 + 5 + ... + 403) + 404^2} = \sqrt{5 \cdot 202^2 + 2^2 \cdot 202^2} = \sqrt{202^2 \cdot 9} = 3 \cdot 202 = 606 \in \mathbb{Q}$.

8. Aflaţi partea întreagă şi partea fracţionară a următoarelor numere reale:

a) 7,12; **b)** –9; **c)** –4,(3); **d)** $\frac{17}{3}$; **e)** $-14\frac{3}{7}$; **f)** $\frac{4n+7}{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$; **g)** $\sqrt{23}$.

Rezolvare:

a) $[7{,}12] = 7$; $\{7{,}12\} = 0{,}12$; **b)** $[-9] = -9$; $\{-9\} = 0$; **c)** $[-4{,}(3)] = -5$; $\{-4{,}(3)\} = \frac{2}{3}$;

d) $\left[\frac{17}{3}\right] = 5$; $\left\{\frac{17}{3}\right\} = \frac{2}{3}$; **e)** $\left[-14\frac{3}{7}\right] = -15$; $\left\{-14\frac{3}{4}\right\} = \frac{4}{7}$; **f)** $\left[\frac{4n+7}{4n+3}\right] = 1$ şi $\left\{\frac{4n+7}{4n+3}\right\} = \frac{4}{4n+3}$.

g) $4 < \sqrt{23} < 5$, deci $\left[\sqrt{23}\right] = 4$ şi $\left\{\sqrt{23}\right\} = \sqrt{23} - 4$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Scrieţi în formă zecimală numerele raţionale: **a)** $\frac{5}{8}; \frac{7}{25}; \frac{3}{125}; \frac{1}{80}; \frac{3}{40}; \frac{1}{12}$;

b) $\frac{1}{33}; \frac{1}{39}; \frac{4}{7}; \frac{7}{16}; \frac{11}{50}; \frac{2}{3}$; **c)** $\frac{7}{6}; \frac{5}{80}; \frac{36}{28}; \frac{5}{32}; \frac{11}{75}$. (*nota 5*)

2. Determinaţi: **a)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; **b)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; **c)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$; **d)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$; **e)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-$; **f)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$; **g)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$; **h)** $\mathbb{Z}^* \cup \mathbb{Q}$; **i)** $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; **j)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$; **k)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **l)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; **m)** $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$. (*nota 7*)

3. Scrieţi fracţiile în formă ireductibilă şi precizaţi dacă fracţia zecimală care reprezintă numărul raţional este periodică simplă, periodică mixtă sau are un număr finit de zecimale (nu toate nule). **a)** $\frac{25}{75}$; **b)** $\frac{4}{28}$; **c)** $\frac{305}{427}$; **d)** $\frac{1{,}2}{5{,}6}$; **e)** $\frac{2{,}01}{8{,}1}$; **f)** $\frac{6}{80}$; **g)** $\frac{21}{45}$; **h)** $\frac{0{,}2}{1{,}1}$; **i)** $\frac{3{,}5}{0{,}(6)}$; **j)** $\frac{35}{30}$; **k)** $\frac{35}{56}$; **l)** $\frac{1{,}15}{69}$; **m)** $\frac{26}{14}$; **n)** $\frac{2{,}1}{3{,}3}$; **o)** $\frac{56}{40}$.

a) → **o)** – (*nota 5*); **d)** → **n)** – (*nota 7*)

IV.2 Cubul

$V = a^3$; $d = a\sqrt{3}$; $\mathcal{A}_l = 4a^2$; $\mathcal{A}_t = 6a^2$.

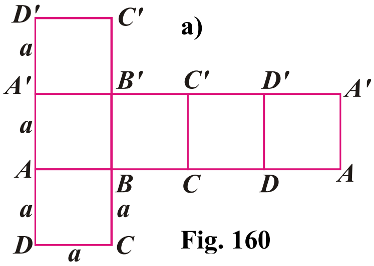
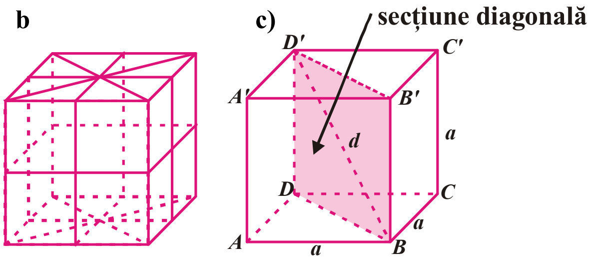


Fig. 160



Desfăşurarea cubului (fig. 160)

Fig. 161

Probleme rezolvate:

1. Să se determine aria totală şi volumul unui cub a cărui diagonală are lungimea de 6 m.

Rezolvare:

Dacă notăm cu a şi d lungimea muchiei cubului şi, respectiv, a diagonalei acestuia, avem $d = a\sqrt{3}$ şi $d = 6$ cm de unde rezultă $a = 2\sqrt{3}$.

$\mathcal{A} = 6a^2 = 6 \cdot (2\sqrt{3})^2 = 72$ (m²).

$\mathcal{V} = a^3 = (2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}$ (m³).

PROBLEMĂ PRACTICĂ

2. Un rezervor neacoperit având formă de cub, cu capacitatea de 270 hl urmează a fi vopsit în interior. Ce cantitate de vopsea este necesară dacă se consumă în medie 2 kg de vopsea pentru o suprafaţă de 15 m²?

Rezolvare:

270 hl = 27000 l = 27000 dm³ = 27 m³.

Dacă notăm cu a adâncimea (lungimea, lăţimea) rezervorului, avem $a^3 = 27$ m³, de unde rezultă $a = 3$ m. Suprafaţa care urmează a fi vopsită este $5a^2 = 45$ m². Cantitatea de vopsea necesară este $(45 : 15 \cdot 2)$kg = 6 kg.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se afle aria şi volumul unui cub ştiind că diagonala lui este de: **a)** $6\sqrt{3}$ cm; **b)** $18\sqrt{3}$ m; **c)** $2\sqrt{2}$ cm; **d)** $(2x - 1)$ cm, unde $x \in \mathbb{R}$, $x > \frac{1}{2}$. **a), b)** – (*nota* 5); **c), d)** – (*nota* 7)

2. Diagonala feţei unui cub este egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Calculaţi: **a)** lungimea muchiilor cubului; **b)** aria totală a cubului; **c)** lungimea diagonalei cubului; **d)** volumul cubului. (*nota* 5)

3. Diagonala unui cub are lungimea de $12\sqrt{3}$ cm. Calculaţi: **a)** lungimea muchiei cubului; **b)** aria laterală a cubului; **c)** volumul cubului. (*nota* 5)

4. Fie punctele E şi F mijloacele muchiilor $[AD]$ şi $[CD]$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $EF = 20\sqrt{2}$ cm, calculaţi: **a)** aria totală a cubului; **b)** aria triunghiului BDB'; **c)** lungimea diagonalei cubului. (*nota* 5)

5. Un cub are lungimea muchiei de 6 m. Cu cât se măreşte volumul cubului dacă lungimea muchiei creşte cu 3 cm? (*nota* 7)

Teste recapitulative

Test 22

I. Completaţi spaţiile punctate:

1. Cilindrul circular drept cu raza de 4 cm şi înălţimea de 5 cm are aria laterală de ... cm^2. (5p) (*nota* 5)

2. Conul circular drept cu generatoarea de 10 cm şi raza de 5 cm are aria laterală de ... cm^2. (5p) (*nota* 5)

3. Un cilindru circular drept se desfăşoară după un dreptunghi având aria de 360π cm^2. Dacă generatoarea cilindrului are lungimea de 15 cm, atunci raza cilindrului are lungimea egală cu ... cm. (5p) (*nota* 5)

4. Un con circular drept se desfăşoară după un sector de disc de $180°$ şi rază 12 cm. Înălţimea conului are lungimea ... cm. (5p) (*nota* 5)

5. Secţiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 8 cm. Volumul cilindrului este egal cu ... cm^3. (5p) (*nota* 5)

6. Secţiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu latura de 4 cm. Volumul conului este egal cu ... cm^3. (5p) (*nota* 5)

7. Într-un con, raza este egală cu $5\sqrt{3}$ cm şi aria secţiunii axiale este de $25\sqrt{3}$ cm^2. Unghiul format de generatoarea conului cu planul bazei are măsura de ...°. (5p) (*nota* 5)

8. Aria unei sfere cu raza de 8 cm este egală cu ... cm^2. (5p) (*nota* 5)

9. Aria unei sfere este egală cu 256π cm^2. Volumul sferei este egal cu ... cm^3. (10p) (*nota* 7)

II. Scrieţi rezolvările complete:

1. Într-un cilindru circular drept, media aritmetică dintre raza şi generatoarea cilindrului este 10 iar $\frac{2}{7}$ din generatoare întrece cu 1 cm jumătate din rază. Să se afle aria laterală, volumul şi aria secţiunii axiale a cilindrului. (10p) (*nota* 7)

2. Secţiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel cu perimetrul de 36 cm, iar lungimea segmentului care uneşte mijloacele laturilor congruente este 8 cm. În con se face o secţiune printr-un plan paralel cu baza, situat la $\frac{2}{3}$ din înălţime faţă de vârful conului. Să se calculeze: **a)** Aria laterală şi volumul conului iniţial; **b)** Aria laterală şi volumul trunchiului de con obţinut; **c)** Măsura unghiului sectorului de cerc obţinut prin desfăşurarea suprafeţei laterale a conului; **d)** Cât la sută reprezintă volumul trunchiului de con din volumul conului mare. (20p) (*nota* 9)

3. Un con circular drept are raza de 4 cm şi secţiunea axială triunghiul VAB cu aria de $32\sqrt{2}$ cm^2. Să se determine lungimea minimă a unui drum parcurs pe suprafaţa laterală a conului de la A la B. (10p) (*nota* 10)

Timp de lucru: 2 ore; se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete

1. **Figura 211** este schița unui teren în formă de dreptunghi $ABCD$ cu AB = 150 m și AD = 100 m. Punctul M este mijlocul laturii AD, iar punctul N este situat pe latura DC astfel încât $DN = 2NC$.

a) Arătați că aria terenului $ABCD$ este egală cu 1,5 ha. (5p)

b) Demonstrați că triunghiul MNB este isoscel. (5p)

c) Calculați măsura unghiului format de dreptele MN și NB.(5p)

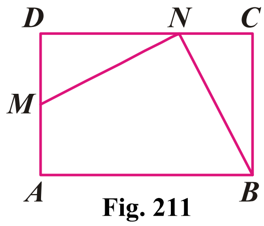


Fig. 211

2. În **figura 212** este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA = 3\sqrt{5}$ cm și AB = 6 dm. Punctul M este mijlocul laturii AD.

a) Arătați că VM = 6 dm. (5p)

b) Calculați câte grame de vopsea sunt necesare pentru vopsirea suprafeței laterale a piramidei știind că pentru vopsirea unei suprafețe de un decimetru pătrat se folosesc 30 grame de vopsea. (5p)

c) Demonstrați că sinusul unghiului dintre planele (VAD) și (VBC) este egal cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (5p)

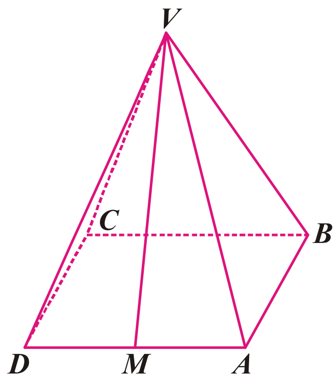


Fig. 212

⌛ Test 34 (varianta 7)
Evaluare Naţională, an şcolar 2015-2016

Subiectul I (30p). Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele

1. Rezultatul calculului $10 \cdot 5 - 50$ este egal cu ... . (5p)

2. Dacă $\frac{a}{16} = \frac{7}{8}$, atunci a este egal cu ... . (5p)

3. Cel mai mare număr natural care aparţine intervalului (2, 6] este egal cu … . (5p)

4. Pătratul $ABCD$ are latura de 3 cm. Perimetrul acestui pătrat este egal cu ... cm. (5p)

5. În **figura 213** este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Măsura unghiului determinat de dreptele AB şi AD este egală cu ...°. (5p)

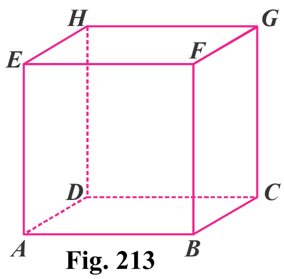
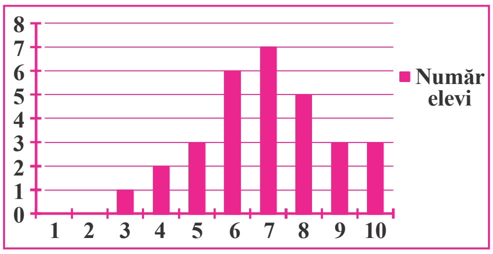


Fig. 213

6. În diagrama alăturată este prezentată repartiţia notelor obţinute la un test de matematică de elevii unei clase a VIII-a dintr-o şcoală.

Conform diagramei, numărul elevilor care au obţinut nota 5 la acest test este egal cu … . (5p)



Subiectul al II-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete

1. Desenaţi, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. (5p)

2. Ştiind că $x = \sqrt{3}$ şi $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, arătaţi că $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}$. (5p)

3. În vacanţă, Mihai a economisit o sumă de bani. După ce a cheltuit două cincimi din această sumă, lui Mihai i-au mai rămas 72 de lei. Calculaţi suma de bani pe care a economisit-o Mihai în vacanţă. (5p)

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia f într-un sistem de coordonate xOy. (5p)

b) Calculaţi aria triunghiului determinat de graficul funcţiei f şi axele sistemului de coordonate xOy. (5p)

5. Se consideră expresia $E(x) = \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{1}{x^2-4} - x(x-1)$, unde x este număr real, $x \neq -2$ şi $x \neq 2$. Arătaţi că $E(x) = 2$, pentru orice x număr real, $x \neq -2$ şi $x \neq 2$. (5p)

Subiectul al III-lea (30p). Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete

1. Figura 214 este schiţa unui teren. Triunghiul ABC este echilateral cu $AB = 18$ m şi punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât triunghiul ACD este obtuzunghic, cu $CD = 9$ m. Punctul E este situat pe segmentul AD, astfel încât $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle DCE$.

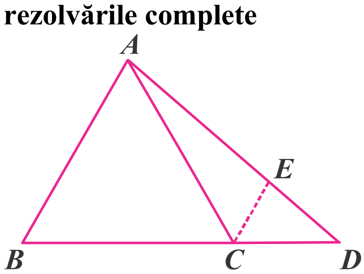


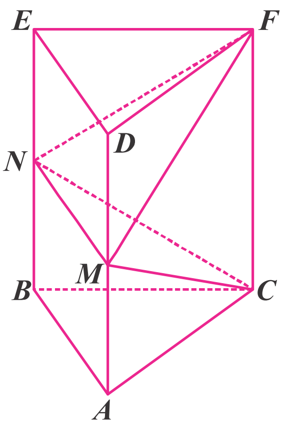
Fig. 214

a) Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $81\sqrt{3}$ m^2. (5p)

b) Demonstraţi că dreptele EC şi AB sunt paralele. (5p)

c) Arătaţi că triunghiul EAC are perimetrul egal cu $6(4+\sqrt{7})$ m. (5p)

2. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCDEF$, cu baza triunghi echilateral, $AB = 10$ cm şi $AD = 10\sqrt{3}$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv, BE.



a) Arătaţi că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 30 cm. (5p)

b) Arătaţi că aria laterală a prismei este mai mică decât 525 cm^2. (5p)

c) Demonstraţi că planele (CMN) şi (FMN) sunt perpendiculare. (5p)

REZULTATE, INDICAŢII, SOLUŢII, COMENTARII

ALGEBRĂ. CAPITOLUL I. Numere reale

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *Exerciţii de recunoaştere a numerelor întregi, raţionale, iraţionale*

1. a) 0,625; 0,28; 0,024; 0,0125; 0,075; 0,08(3); **b)** 0,(03); 0,(025641); 0,(571428); 0,4375; 0,22; 0,(6); **c)** 1,1(6); 0,0625; 1,(285714); 0,15625; 0,14(6). **2. a)** $\mathbb{Z}$; **b)** $\mathbb{N}$; **c)** $\mathbb{N}$; **d)** $\mathbb{Q}$; **e)** $\mathbb{Z}^*$; **f)** $\mathbb{N}$; **g)** $\mathbb{R}$; **h)** $\mathbb{Q}$; **i)** $\mathbb{Z}$; **j)** $\varnothing$; **k)** $\mathbb{Z}_-$; **l)** $\varnothing$; **m)** $\varnothing$. **3. a), b), c), h)** periodică simplă; **d), e), g), j)** periodică mixtă; **f), i)** un număr finit de zecimale. **4. a)** $\frac{9}{5};\frac{63}{20};\frac{9}{20};\frac{10}{3};-\frac{60}{11};\frac{5}{37};\frac{7}{6}$; **b)** $\frac{131}{90};\frac{1001}{900}$; $\frac{617}{4995};-\frac{9}{50};\frac{31}{6}$; **c)** $\frac{41631}{9990};\frac{712}{225};-\frac{11}{9};\frac{211}{900}$; **d)** $\frac{45}{11};2\frac{7}{60};1\frac{11}{12};3\frac{3}{16}$. **5. a)** 3; **b)** 7; **c)** 1. **6.** M = {7; 9; 20; 10^7}; P = {–6; 9; 7; –10; 20; 10^7; -3^8}; T = {1,3(6); –1,5; –3,1(6); –6; 9,7; $-\frac{3}{5}$; $\frac{7}{6}$; 7,167; –4,(15); –10; 20;10^7; -3^8}; S = {$\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; π; $-3\sqrt{2}$; $5\sqrt{6}$; $-\pi$; $\sqrt{11}$; $-\sqrt{2}$}. **7. a)** A; **b)** A; **c)** F; **d)** A; **e)** A; **f)** A; **g)** A; **h)** F; **i)** A; **j)** F; **k)** A; **l)** A. **8.** D_{12} = {–12; –6; –4; –3; –2; –1; 1; 2; 3; 4; 6; 12}; D_{-8} = {–8; –4; –2; –1; 1; 2; 4; 8}; D_{-14} = {1; 2; 7; 14}. **9.** A = {5, 6, 8, 12}; B = {1, 2, 4, 5, 8, 13}; C = {–2}; D = {5, 9} $\frac{x+2}{x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x-1/x+2 \Rightarrow x-1/(x-1)+3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x - 1/3 \Rightarrow x - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow$ E = {2, 4}; F = {0, 2}; $\frac{x(x+1)}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x + 1/x^2 + x \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x + 1/2x^2 + 2x \Rightarrow 2x + 1/x(2x + 1) + x \Rightarrow 2x + 1/x \Rightarrow 2x + 1/2x \Rightarrow 2x + 1/(2x + 1) - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x + 1/1 \Rightarrow 2x + 1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow$ G = {0; –1}; H = {(–6, 1), (6, –1), (–2, 3), (3, –2), (1, –6), (2, –3), (–3, 2), (–1, 6)}; I = {–4, –2, –1, 1}. **10. a)** 21; **b)** 31; **c)** 123; **d)** 1,5, **e)** 2,5; **f)** 1,01; **g)** $\frac{5}{7}$; h) $\frac{13}{15}$; **i)** $1\frac{11}{13}$; **j)** $\frac{5}{4}$; **k)** $\frac{31}{12}$; **l)** $2\frac{9}{13}$. **11.** $(x, y) \in \{(2, 5), (5, 6), (8, 9)\}$. **12. a)** Presupunem că $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Putem scrie $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Avem: $6 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 6n^2 = m^2 \Rightarrow 2/m^2$, 2 prim $\Rightarrow 2/m \Rightarrow m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) şi, deci $6n^2 = 4k^2 \Rightarrow 3n^2 = 2k^2 \Rightarrow 2/n$, contradicţie; **b)** $5n + 2$ şi $5n + 3$ nu sunt pătrate perfecte oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; **c)** Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ se divide cu 97 şi nu se divide cu 97^2, deci nu este pătrat perfect etc.; **d)** Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000 + 2$ este 2, deci nu este pătrat perfect. **13. a)** Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} + 3 = r$, $r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - 3 \in \mathbb{Q}$, contradicţie; **d)** Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} + \sqrt{3} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - \sqrt{3} \Rightarrow 5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{r^2-2}{2r} \in \mathbb{Q}$, contradicţie; **f)** $\sqrt{29+12\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2} = 3 + 2\sqrt{5}$. **14. a)** [–5,16] = – 6; {– 5,16} = 0,84; **b)** [3,14] = 3; {3,14} = 0,14; **c)** [4,(7)] = 4; {4,(7)} = $\frac{7}{9}$; **d)** $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$; $\left\{\frac{10}{4}\right\} = \frac{1}{2}$; **e)** $\left[-5\frac{4}{5}\right] = -6$; $\left\{-5\frac{4}{5}\right\} = \frac{1}{5}$; **f)** $\left[-\frac{9}{4}\right] = -3$; $\left\{-\frac{9}{4}\right\} = \frac{3}{4}$; **g)** $\left[\frac{2n+3}{2n+4}\right] = 0$; $\left\{\frac{2n+3}{2n+4}\right\} = \frac{2n+3}{2n+4}$; **h)** $\frac{3n+5}{3n+4} = 1 + \frac{1}{3n+4}$ etc; **i)** $4 < \sqrt{17} < 5$, deci $[\sqrt{17}] = 4$ şi $\{\sqrt{17}\} = \sqrt{17} - 4$; **j)** $[\sqrt{7} - 2] = 0$; $\{\sqrt{7} - 2\} = \sqrt{7} - 2$; **k)** $[\sqrt{13} - 4] = -1$; $\{\sqrt{13} - 4\} = \sqrt{13} - 3$.

15. a) $\sqrt{2013+2(1+2+3+\ldots+2012)} = \sqrt{2013 + {}^1\cancel{2} \cdot \frac{2012 \cdot 2013}{\cancel{2}_1}} = \sqrt{2013 + 2012 \cdot 2013} = \sqrt{2013^2} = 2013 \in \mathbb{Z}$, deci propoziţia este adevărată; **b)** $\sqrt{343^2 - (336^2 + 7 \cdot 336)} = \sqrt{343^2 - 336 \cdot 343} = \sqrt{343 \cdot 7} = \sqrt{7^4} = 7^2 \in \mathbb{Q}$, deci propoziţia este adevărată; **c)** $\sqrt{\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}} = \sqrt{\frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}} =$

$=\sqrt{\frac{1}{10}-\frac{1}{100}}=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}\in\mathbb{Q}$, deci propoziția este adevărată. **16. a)** $a+2=2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{19}=$ $=2^2+2^2+2^3+\ldots+2^{19}=2^3+2^3+\ldots+2^{19}=\ldots=2^{19}+2^{19}=2^{20}$; $\sqrt{a+2}=2^{10}\in\mathbb{N}$; **b)** $a-1=2^{20}-3$. Cum U(2^{20}) = U(2^4) = 6, rezultă că ultima cifră a numărului $a-1$ este 3 etc. **17.** O condiție necesară pentru a avea $\sqrt{\frac{19-x}{48}}\in\mathbb{Q}$ este $x\le 19$. Prin verificare directă se obține A = {7, 16, 19}.

I. 2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări. Ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real (valoarea absolută) **1. a)** $\frac{3}{10}>\frac{7}{25}$; **b)** $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}$; **c)** $-3{,}4(5)<-3{,}(45)$; **d)** $-\pi>-\frac{10}{3}$; **e)** $3{,}5=\frac{7}{2}$; **f)** $0{,}01>0{,}00934$; **g)** $-2^7<-5^3$; **h)** $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; **i)** $\sqrt{21}>2\sqrt{5}$; **j)** $7\sqrt{3}=\sqrt{147}>\sqrt{144}=12$; **k)** $-2\sqrt{7}>-4\sqrt{2}$; **l)** $-4\sqrt{5}>-2\sqrt{21}$. **2. a)** $-3{,}7<-3{,}(6)<-3<2{,}561<$ $<3{,}2<3\frac{1}{4}<3{,}(7)$; **b)** $-\frac{11}{3}<-\frac{5}{6}<-\frac{7}{9}<-\frac{11}{18}<\frac{7}{18}<\frac{17}{18}<\frac{3}{2}$; **c)** $3{,}8(34)<3{,}83(4)<3{,}(834)<3{,}8349$.

3. $-\sqrt{11};-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{5}}{5};1;\sqrt{2};\sqrt{5};\sqrt{7};2\sqrt{2};2\sqrt{3};3\sqrt{2};2\sqrt{6}$. **5.** $OF=\sqrt{2}$ unități de lungime (u.l.); $AC=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{5}\right)$(u.l.); BD = 3,75 (u.l.); $BF=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)$(u.l.); $AD=(4-\sqrt{3})$(u.l.); $OA=\sqrt{3}$ (u.l.). **6. a)** A(6) și B($-2\sqrt{2}$); **b)** AB = $(6+2\sqrt{2})$ cm; **c)** M este abscisa $\frac{6+(-2\sqrt{2})}{2}=3-\sqrt{2}$. Deci M($3-\sqrt{2}$). **7. a)** $\sqrt{40{,}5}=6{,}363\ldots$; $\sqrt{1{,}45}=1{,}204\ldots$; $\sqrt{300}=17{,}320\ldots$; $\sqrt{4{,}5}=2{,}121\ldots$; **b)** pentru $\sqrt{40{,}5}$: 6,3; 6,36; 6,364 și $6<\sqrt{40{,}5}<7$ etc.

8.

	Cu aproximație de	*prin lipsă*	*prin adaos*	*prin rotunjire*
$\sqrt{8}=2{,}8284$	o unitate	2	3	3
	o zecime	2,8	2,9	2,8
	o sutime	2,82	2,83	2,83
	o miime	2,828	2,829	2,828
$-\sqrt{5}=-2{,}2360$	o unitate	–3	–2	–2
	o zecime	–2,3	–2,2	–2,2
	o sutime	–2,24	–2,23	–2,24
	o miime	–2,237	–2,236	–2,236

9. $n\simeq 11{,}795$. **a)** $[n]=11$; $\{n\}\simeq 11{,}79$; **b)** 11,8; **c)** 11,80; d) 11,7. **10. a)** 3 și 4; **b)** –3 și –2; **c)** 2 și 3; **d)** 4 și 5; **e)** 3 și 4; **f)** 7 și 8. **11. a)** $\frac{3}{8}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{7}{10}<\frac{3}{4}<\frac{31}{40}<\frac{4}{5}$; **b)** Există o infinitate de numere; **c)** $\frac{3}{8}<\sqrt{n}<\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{9}{64}<n<\frac{16}{25}$ etc. **12. a) 1)** $-\frac{5}{2};-\frac{243}{100};-2{,}3;-\frac{12}{5}$; **2)** -3; $-\frac{31}{10}$; $-\frac{19}{6};-3\frac{1}{7}$; **b)** –3,47; –3,48; –3,5; –3,572. **13. a)** $\sqrt{5}+\sqrt{125}=6\sqrt{5}=\sqrt{180}<\sqrt{196}=14$; **b)** Fie $a=2\sqrt{21}$ și $b=\sqrt{12}+\sqrt{32}$; $a^2-b^2=84-(12+32+16\sqrt{6})=40-16\sqrt{6}=4(10-4\sqrt{6})=4(\sqrt{100}-\sqrt{96})>0$, deci $a^2>b^2$ și cum $a>0$, $b>0$ rezultă $a>b$, adică $2\sqrt{21}>2\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ etc. **14.** A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}; B = {–2, –1, 0, 1, 2}; C = {–8, –7, –6, ..., 3, 4}etc. **15. a)** $x\in\{-5, 5\}$; **b)** $x\in\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; **c)** $x\in\{-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1\}$; **d)** $x\in\varnothing$; **e)** $x=0$; **f)** $x\ge 3$; **g)** $x=0$; **h)** $x\le 0$; **i)** $x\le 5$; **j)** $x\in\{-3, 3\}$; **k)** $x\in\{-6, 4\}$; **l)** $x\in\left\{\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right\}$; **m)** $x\in[-3; 6]$.