

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU  
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

# MATEMATICĂ

clasa a X-a

- ALGEBRĂ
- GEOMETRIE
- TRIGONOMETRIE

**SINTEZE DE TEORIE**  
**EXEMPLE REZOLVATE**  
**EXERCII ȘI PROBLEME**

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă





# CUPRINS

	E*	R**
<b>Capitolul I. PUTERI ȘI RADICALI</b>		
1. Radicalul de ordinul $n$ , $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$		
Breviar de teorie .....	6	
Probleme propuse .....	7	358
2. Puteri cu exponent rațional. Puteri cu exponent real		
Breviar de teorie .....	12	
Probleme propuse .....	14	360
3. Logaritmi		
Breviar de teorie .....	18	
Probleme propuse .....	20	361
Teste de evaluare .....	25	365
<b>Capitolul II. NUMERE COMPLEXE</b>		
1. Forma algebrică a unui număr complex		
Breviar de teorie .....	28	
Probleme propuse .....	30	367
2. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul al doilea, cu coeficienți reali.		
Ecuații bipătrate		
Breviar de teorie .....	34	
Probleme propuse .....	35	370
3. Forma trigonometrică a unui număr complex.		
Aplicații ale numerelor complexe în geometrie		
Breviar de teorie .....	39	
Probleme propuse .....	50	372
Teste de evaluare .....	54	376
<b>Capitolul III. FUNCȚII INJECTIVE. FUNCȚII SURJECTIVE. FUNCȚII BIJECTIVE. FUNCȚII INVERSABILE</b>		
1. Funcții injective		
Breviar de teorie .....	56	
Probleme propuse .....	62	377
2. Funcții surjective		
Breviar de teorie .....	65	
Probleme propuse .....	70	379
3. Funcții bijective. Funcții inversabile		
Breviar de teorie .....	74	
Probleme propuse .....	80	381
Addendă .....	86	
Teste de evaluare .....	89	385
<b>Capitolul IV. FUNCȚII. ECUAȚII. INECUAȚII</b>		
1. Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical		
Breviar de teorie .....	91	
Probleme propuse .....	93	387
2. Funcția exponențială. Funcția logaritmică		
Breviar de teorie .....	96	
Probleme propuse .....	99	390

\* E - enunțuri

\*\* R - răspunsuri, rezolvări

3. Funcții trigonometrice directe		
Breviar de teorie .....	102	
Probleme propuse .....	106	393
4. Funcții trigonometrice inverse		
Breviar de teorie .....	109	
Probleme propuse .....	119	395
5. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale		
Breviar de teorie .....	123	
Probleme propuse .....	125	399
6. Ecuații exponențiale. Sisteme de ecuații exponențiale		
Breviar de teorie .....	128	
Probleme propuse .....	130	403
7. Ecuații logaritmice. Sisteme de ecuații logaritmice		
Breviar de teorie .....	134	
Probleme propuse .....	136	406
8. Inecuații exponențiale. Inecuații logaritmice		
Breviar de teorie .....	141	
Probleme propuse .....	144	409
9. Ecuații trigonometrice. Inecuații trigonometrice		
Breviar de teorie .....	148	
A. Ecuații trigonometrice fundamentale .....	148	
A.1. Ecuații trigonometrice fundamentale cu argument simplu .....	148	
1° $\sin x = a$ .....	148	
2° $\cos x = a$ .....	150	
3° $\operatorname{tg} x = a$ .....	152	
4° $\operatorname{ctg} x = a$ .....	153	
A.2. Ecuații trigonometrice fundamentale cu argument compus .....	154	
B. Ecuații trigonometrice elementare .....	155	
C. Ecuații trigonometrice reducibile la ecuații algebrice .....	159	
D. Ecuații trigonometrice liniare .....	162	
E. Ecuații trigonometrice omogene .....	166	
F. Ecuații simetrice în sinus și cosinus de același argument .....	168	
G. Ecuații care se rezolvă prin transformarea sumei în produs sau invers .....	170	
H. Ecuații trigonometrice care se rezolvă prin mulțimea de imagini .....	171	
I. Ecuații trigonometrice cu arcfuncții .....	172	
J. Ecuații trigonometrice cu parametru real .....	174	
INECUAȚII TRIGONOMETRICE		
A. Inecuații de forma: $\sin x \geq a$ ; $\sin x > a$ ; $\sin x < a$ ; $\sin x \leq a$ .....	179	
B. Inecuații de forma: $\cos x \geq a$ ; $\cos x > a$ ; $\cos x < a$ ; $\cos x \leq a$ .....	184	
C. Inecuații de forma: $\operatorname{tg} x \geq a$ ; $\operatorname{tg} x > a$ ; $\operatorname{tg} x < a$ ; $\operatorname{tg} x \leq a$ .....	186	
D. Inecuații de forma: $\operatorname{ctg} x \geq a$ ; $\operatorname{ctg} x > a$ ; $\operatorname{ctg} x < a$ ; $\operatorname{ctg} x \leq a$ .....	187	
E. Inecuații trigonometrice reducibile la inecuații algebrice .....	189	
F. Inecuații care conțin produse sau rapoarte de expresii trigonometrice .....	190	
Probleme propuse .....	194	412
Teste de evaluare .....	198	417

## Capitolul V. METODE DE NUMĂRARE.

### ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

1. Probleme de numărare		
Breviar de teorie .....	203	
Probleme propuse .....	209	420



2. Permutările elementelor unei mulțimi finite cu $n$ elemente		
Breviar de teorie .....	211	
Probleme propuse .....	213	421
3. Aranjamente de $n$ elemente luate câte $k$ elemente.		
Combinări de $n$ elemente luate câte $k$ elemente		
Breviar de teorie .....	215	
Probleme propuse .....	220	422
4. Binomul lui Newton		
Breviar de teorie .....	223	
Probleme propuse .....	226	423
Teste de evaluare .....	230	427

### Capitolul VI. MATEMATICI FINANCIARE

1. Procente. Dobânzi. Taxa pe valoarea adăugată (T.V.A.)		
Breviar de teorie .....	232	
Probleme propuse .....	235	428
2. Elemente de statistică matematică		
Breviar de teorie .....	239	
Probleme propuse .....	243	429
3. Elemente de calculul probabilităților		
Breviar de teorie .....	247	
Probleme propuse .....	272	432
Teste de evaluare .....	277	434

### Capitolul VII. GEOMETRIE

1. Reper cartezian în plan. Distanța dintre două puncte.		
Coordonatele mijlocului unui segment		
Breviar de teorie .....	279	
Probleme propuse .....	281	435
2. Coordonatele unui vector într-un reper cartezian		
Breviar de teorie .....	284	
Probleme propuse .....	290	437
3. Ecuația dreptei într-un reper cartezian		
Breviar de teorie .....	294	
Probleme propuse .....	306	438
4. Drepte paralele. Drepte perpendiculare. Unghiul dintre două drepte		
Breviar de teorie .....	309	
Probleme propuse .....	311	440
5. Distanțe într-un reper cartezian. Arii într-un reper cartezian		
Breviar de teorie .....	314	
Probleme propuse .....	320	443
Teste de evaluare .....	322	445

### Capitolul VIII. PROBLEME ȘI TESTE RECAPITULATIVE

1. Probleme recapitulative de calcul vectorial .....	327	448
2. Probleme recapitulative de geometrie într-un reper cartezian din plan .....	334	459
3. Teste recapitulative de trigonometrie .....	339	466

Bibliografie selectivă .....		478
------------------------------	--	-----



# Puteri și radicali

## 1. Radicalul de ordinul $n$ , $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$

### Breviar de teorie

**Definiție:** Fie numerele  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ . Numim *radical de ordin  $n$*  al numărului real pozitiv  $a$ , unicul număr real pozitiv  $t$ , a cărui putere de exponent  $n$  este numărul  $a$  (foarte apropiat de  $a$ , mai mic sau egal cu  $a$ ).

**Observații:**

1) Radicalul de ordin  $n$  al numărului real pozitiv  $a$  se notează  $\sqrt[n]{a}$  și avem echivalența:  $\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$ , unde  $t \geq 0$ .

2) Dacă  $n = 2$ , atunci notăm  $\sqrt{a}$  în loc de  $\sqrt[2]{a}$ .

**Definiție:** Fie numerele  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ,  $n$  impar și  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a < 0$ . Numim *radical de ordin  $n$*  ( $n$  impar) al numărului real negativ  $a$ , unicul număr real negativ  $t$  a cărui putere de exponent  $n$  este numărul  $a$  (foarte apropiat de  $a$ , mai mic sau egal cu  $a$ ).

$\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$ , unde  $t < 0$ .

### Proprietățile radicalilor

Fie numerele  $m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$  și  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ .

$$1) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m} \quad 2) \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} \quad 3) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad 5) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad 6) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

### Formulele radicalilor compuși (suprapuși)

Dacă  $a, b \in [0, +\infty)$ ,  $a^2 \geq b$  și  $c = \sqrt{a^2 - b}$ , atunci sunt adevărate relațiile și avem echivalența:

$$1) \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad 2) \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$



## Probleme rezolvate

1. Ordonăți crescător numerele:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{5}$ ,  $\sqrt[6]{4}$ ,  $\sqrt[12]{60}$ .

Rezolvare: Folosim formula  $\sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

$$\text{Avem: } \sqrt{2} = \sqrt[12]{64}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}, \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}, \sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{16}.$$

$$\text{Rezultă: } \sqrt[6]{4}, \sqrt[12]{60}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}.$$

2. Determinați numărul  $x \in (0, +\infty)$  care verifică egalitatea:  $\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}}$ .

Rezolvare: Avem  $x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ ,  $\sqrt{x}\sqrt{x} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$ .

$$2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8x}; \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{8x} = (8x)^{\frac{1}{9}}.$$

$$\text{Rezultă că: } x^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{9}} = 2^{\frac{3}{9}} \Leftrightarrow x^{\frac{23}{36}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{36}{23}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{12}{23}}.$$

3. Fie  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$  și  $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ . Calculați  $p(x_0)$ .

Rezolvare: Cu ajutorul formulei  $(a-1)^3$ ,  $p(x)$  se mai poate scrie:

$$p(x) = (x-1)^3 - 6x. \text{ Astfel putem calcula:}$$

$$p(x_0) = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 2 + 4 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 0.$$

4. Demonstrați că există  $x \in \mathbb{R}^*$ , astfel încât  $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$ .

Rezolvare: Cu ajutorul formulei  $(a+1)^3$ , membrul drept al ecuației se

mai poate scrie:  $2x^3 + (x+1)^3 = 0$ . Aplicăm formula  $a^3 + b^3$  și obținem:

$$(\sqrt[3]{2}x + x + 1)(a^2 + b^2 - ab) = 0, \text{ unde } a = \sqrt[3]{2}x, b = x + 1 \text{ și } a^2 + b^2 - ab \neq 0.$$

$$\text{Rezultă că } x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}.$$

## Probleme propuse

1. Calculați valorile următorilor radicali:

- a)  $\sqrt{9}$ ;      b)  $\sqrt{196}$ ;      c)  $\sqrt[3]{8}$ ;      d)  $\sqrt[3]{216}$ ;  
e)  $\sqrt[4]{81}$ ;      f)  $\sqrt[4]{625}$ ;      g)  $\sqrt[5]{1}$ ;      h)  $\sqrt[5]{100000}$ .

2. Calculați valorile următorilor radicali:

- a)  $\sqrt[3]{-8}$ ;      b)  $\sqrt[3]{-343}$ ;      c)  $\sqrt[5]{-32}$ ;      d)  $\sqrt[5]{-243}$ ;  
e)  $\sqrt[7]{-1}$ ;      f)  $\sqrt[7]{-10000000}$ ;      g)  $\sqrt[9]{-512}$ ;      h)  $\sqrt[9]{-0,000000001}$ .

**3. Stabiliți valorile următorilor radicali:**

- a)  $\sqrt{2^{100}}$ ;      b)  $\sqrt{3^{40}}$ ;      c)  $\sqrt[3]{2^{60}}$ ;      d)  $\sqrt[3]{5^{21}}$ ;  
 e)  $\sqrt[4]{7^{100}}$ ;      f)  $\sqrt[4]{11^{28}}$ ;      g)  $\sqrt[6]{7^{600}}$ ;      h)  $\sqrt[6]{10^{420}}$ ;  
 i)  $\sqrt[3]{(-2)^{51}}$ ;      j)  $\sqrt[5]{(-3)^{1005}}$ ;      k)  $\sqrt[7]{(-5)^{707}}$ ;      l)  $\sqrt[9]{(-9)^{99}}$ ;  
 m)  $\sqrt[4]{(-2)^{24}}$ ;      n)  $\sqrt[6]{(-3)^{78}}$ ;      o)  $\sqrt[8]{(-5)^{1000}}$ ;      p)  $\sqrt[10]{(-6)^{150}}$ .

**4. Calculați:**

- a)  $\sqrt{36} + 2 \cdot \sqrt{0} - 3\sqrt{16}$ ;      b)  $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-27} + 5\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{1000}$ ;  
 c)  $3\sqrt[4]{16} + 2\sqrt[4]{625} - 5\sqrt[4]{10000}$ ;      d)  $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} + \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$ ;  
 e)  $\sqrt[3]{0,000001} \cdot \sqrt[4]{5^8} \cdot \sqrt{16}$ ;      f)  $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt[6]{4096} \cdot \sqrt[4]{81}}$ .

**5. Determinați partea întreagă a următoarelor numere reale:**

- a)  $\sqrt{11}$ ;      b)  $\sqrt{83}$ ;      c)  $\sqrt[3]{26}$ ;      d)  $\sqrt[3]{28}$ ;  
 e)  $\sqrt[4]{14}$ ;      f)  $\sqrt[4]{24}$ ;      g)  $\sqrt[3]{-11}$ ;      h)  $\sqrt[3]{-32}$ ;  
 i)  $\sqrt[5]{-25}$ ;      j)  $\sqrt[3]{-40}$ ;      k)  $\sqrt[6]{1000}$ ;      l)  $\sqrt[6]{2000}$ .

**6. Determinați partea întreagă a numerelor reale:**

- a)  $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ;  
 b)  $\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}, \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}$ ;  
 c)  $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{2003 \text{ radicali}}, \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}}_{100 \text{ radicali}}$ .

**7. Pentru ce valori ale numărului  $x \in \mathbb{R}$ , au loc egalitățile?**

- a)  $\sqrt{x^2} = x$ ;      b)  $\sqrt{x^2} = -x$ ;      c)  $\sqrt[3]{x^3} = x$ ;      d)  $\sqrt[3]{x^3} = -x$ ;  
 e)  $\sqrt[4]{x^4} = x$ ;      f)  $\sqrt[4]{x^4} = -x$ ;      g)  $\sqrt[6]{(x+1)^6} = x+1$ ;      h)  $\sqrt[6]{(x+1)^6} = -x-1$ ;  
 i)  $\sqrt[4]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{x^3} = 2x-1$ ;      j)  $\sqrt[6]{(x-1)^6} + \sqrt[5]{x^5} = 1$ .

**8. Pentru ce valori ale numărului  $x \in \mathbb{R}$ , sunt definite următoarele expresii?**

- a)  $\sqrt{x^2 - 3x}$ ;      b)  $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ ;      c)  $\sqrt[4]{2x-1}$ ;  
 d)  $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ ;      e)  $\sqrt[3]{x^2 + x - 2}$ ;      f)  $\sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2 - 4x + 3}}$ ;  
 g)  $\sqrt[5]{\frac{1}{x-1}}$ ;      h)  $\sqrt[6]{x^2 - x + 1}$ ;      i)  $\sqrt[8]{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}}$ ;



## 5. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale

### Breviar de teorie

- Se numește *ecuație* (respectiv *inecuație*) *irațională* orice ecuație (respectiv inecuație) în care necunoscuta se află sub cel puțin un radical.

*Exemple:*  $\sqrt{x-1} = 2$ ,  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 3$ ;  $\sqrt{x+1} \geq x$ .

- Prima etapă în cadrul rezolvării ecuațiilor (respectiv inecuațiilor) iraționale este punerea condițiilor de existență a radicalilor (pentru radicalii de ordin par).
- Pentru rezolvarea ecuațiilor iraționale se pun și condiții de compatibilitate a acestora (ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn).
- Metoda obișnuită de rezolvare a ecuațiilor (respectiv a inecuațiilor) iraționale constă în eliminarea radicalilor, fie ridicând ambii membri la puteri convenabile, fie efectuând diferite substituții pentru a reduce ecuațiile (respectiv inecuațiile) iraționale la ecuații (respectiv inecuații) deja studiate (de exemplu, ecuațiile de gradul I sau II sau inecuațiile de gradul I sau II).
- Ultima etapă în cadrul rezolvării ecuațiilor iraționale constă în verificarea soluțiilor obținute atât în ecuația inițială, cât și în domeniul de existență al ecuației adică efectuarea probei (pentru a fi convinși că „soluțiile obținute” nu sunt *soluții străine*, introduse prin ridicarea la putere a ecuației iraționale).

### Probleme rezolvate

1. Rezolvați în  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  următoarea ecuație irațională:  $x = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+2}}$ .

*Rezolvare:*

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Ridicăm ecuația la cub în ambii membri și obținem:  $x^3 = \frac{2x+1}{x+2}$  sau

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0 \text{ sau } (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 1)^2 = 0.$$

Mulțimea soluțiilor este  $\{-1, 1\}$ .

*Observație:* fiind o ecuație de gradul patru, are patru rădăcini, adică

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, x_4 = 1.$$

2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  următoarea ecuație irațională:  $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 4$ .

*Rezolvare:*

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Ridicăm ecuația la cub în ambii membri și obținem:



$$8 + x + 8 - x + 3\sqrt[3]{8+x} \cdot \sqrt[3]{8-x} \cdot (\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x}) = 4 \Rightarrow$$

$$8 + x + 8 - x + 3\sqrt[3]{8+x} \cdot \sqrt[3]{8-x} \cdot 4 = 64 \Rightarrow 16 + 3\sqrt[3]{8+x} \cdot \sqrt[3]{8-x} \cdot 4 = 64 \Rightarrow$$

$$3\sqrt[3]{8+x} \cdot \sqrt[3]{8-x} = 12 \Rightarrow \sqrt[3]{64-x^2} = 4 \text{ sau } 64-x^2 = 64, \text{ deci } x^2 = 0.$$

Această ecuație de gradul al doilea are rădăcinile  $x_1 = x_2 = 0$ .

Mulțimea soluțiilor este  $\{0\}$ .

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  următoarea ecuație irațională:  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-1} = 0$ .

*Rezolvare:*

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Dacă  $a + b + c = 0$ , atunci, din dezvoltarea

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc,$$

obținem:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

Efectuăm substituțiile:  $a = \sqrt[3]{x+1}, b = \sqrt[3]{x+2}, c = \sqrt[3]{x-1}, a, b, c \in \mathbb{R}$ , deoarece radicalii sunt de ordin impar.

$$\text{Rezultă } x+1+x+2+x-1 = 3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x-1)} \text{ sau}$$

$$(3x+2)^3 = 27(x+1)(x+2)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = 27(x^2 - 1)(x+2) \Leftrightarrow 36x + 8 = -27x - 54 \Leftrightarrow x = -\frac{62}{63}.$$

*Verificare:*

Prin calcul direct rezultă că  $x = -\frac{62}{63}$  este soluția unică a ecuației.

4. Rezolvați inecuația irațională:  $\sqrt{3x} + \sqrt{x+1} \leq 5$ .

*Rezolvare:*

$$\text{Domeniul de existență este } \begin{cases} 3x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, +\infty).$$

$$\text{Ridicăm inegalitatea la pătrat: } 3x + x + 1 + 2\sqrt{3x(x+1)} \leq 25 \text{ sau}$$

$$2\sqrt{3x(x+1)} \leq 24 - 4x \Leftrightarrow \sqrt{3x(x+1)} \leq 12 - 2x.$$

Inegalitatea este valabilă numai dacă  $12 - 2x \geq 0$ , deoarece membrul stâng este pozitiv. Deci  $x \in (-\infty, 6]$  și cum  $x \in [0, +\infty)$ , obținem  $x \in [0, 6]$ .

Ridicăm inegalitatea precedentă la pătrat și obținem:

$$3x(x+1) \leq 144 - 48x + 4x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 51x + 144 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-48) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3] \cup [48, +\infty).$$

Mulțimea soluțiilor inecuației date se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ x \in (-\infty, 6] \\ x \in (-\infty, 3] \cup [48, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 3]. \text{ Mulțimea soluțiilor este } [0, 3].$$

## Probleme propuse

1. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt{x+2} = 3$ ;      b)  $\sqrt{2x-1} = 5$ ;      c)  $\sqrt{3x-2} = -3$ ;  
d)  $\sqrt{x^2-7} = 3$ ;      e)  $\sqrt{2x^2+x+4} = \sqrt{7}$ ;      f)  $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}$ .

2. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt[3]{x-1} = 2$ ;      b)  $\sqrt[3]{3x-2} = 1$ ;      c)  $\sqrt[3]{2x-3} = -5$ ;  
d)  $2\sqrt[3]{x+7} = 0$ ;      e)  $\sqrt[3]{x^2-2x} = -1$ ;      f)  $\sqrt[3]{2x^2-5x+4} = \sqrt[3]{2}$ .

3. Rezolvați următoarele ecuații iraționale ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ):

a)  $\sqrt[n]{x-2} = 2$ ;      b)  $\sqrt[n]{2x^2-x+3} = -1$ ;      c)  $\sqrt[n]{5x-2} = 3$ ;  
d)  $\sqrt[n]{x^2-x-1} = -1$ ;      e)  $\sqrt[n]{2x+3} = 1$ ;      f)  $\sqrt[2n+1]{3x+2} = -1$ .

4. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-1}$ ;      b)  $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x-3}$ ;      c)  $\sqrt[4]{x^2-3} = \sqrt{x-2}$ ;  
d)  $\sqrt[4]{2x^2-3x+1} = \sqrt{x+1}$ ;      e)  $\sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{3x-1}$ ;      f)  $\sqrt[3]{2x^2-x+1} = \sqrt[3]{x^2+1}$ ;  
g)  $\sqrt[6]{3x^2-x+4} = \sqrt[3]{x-2}$ ;      h)  $\sqrt[6]{2x^2-4} = \sqrt[3]{x}$ .

5. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt{1-x} = x+1$ ;      b)  $3\sqrt{x+1} = x+1$ ;  
c)  $\sqrt{1+x^2} = x+1$ ;      d)  $\sqrt{4-x^2} = 1-x$ ;  
e)  $\sqrt{x^2-3x+2} = 3-x$ ;      f)  $\sqrt{x^2+9} + x - 7 = 0$ .

6. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt{x-2} - \sqrt{3-x} = 1$ ;      b)  $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$ ;  
c)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = 1$ ;      d)  $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+7} = 2$ ;  
e)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} = 3$ ;      f)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ ;  
g)  $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} = 3$ ;      h)  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x$ .

7. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\sqrt{x+9} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+16}$ ;      b)  $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-9}$ ;  
c)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6}$ ;      d)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1} - 1$ ;  
e)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \sqrt{x+16}$ ;      f)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+1} = 2\sqrt[4]{2x^2-x-1}$ .

8. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a)  $\frac{2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x-2}}{3\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}} = 1$ ;      b)  $\frac{2\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10}}{3\sqrt{x+3} - \sqrt{x+10}} = 2$ ;