CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

MATEMATICĂ

clasa a X-a

- ALGEBRĂ
- GEOMETRIE
- TRIGONOMETRIE

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIŢII ŞI PROBLEME

- Fixarea cunoştinţelor
- Aprofundarea cunoştinţelor
- Performanţă
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă

ROMANIA · EDITURA ŞI TIPOGRAFIA · I C A R ·

CUPRINS

** E – enunţuri*
*** R – răspunsuri, rezolvări*

I Puteri și radicali

1. Radicalul de ordinul $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Breviar de teorie

Definiție: Fie numerele $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$. Numim *radical de ordin n* al numărului real pozitiv a, unicul număr real pozitiv t, a cărui putere de exponent n este numărul a (foarte apropiat de a, mai mic sau egal cu a).

Observații:

1) Radicalul de ordin n al numărului real pozitiv a se notează $\sqrt[n]{a}$ și avem echivalența: $\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$, unde $t \geq 0$.

2) Dacă $n = 2$, atunci notăm $\sqrt{a}$ în loc de $\sqrt[2]{a}$.

Definiție: Fie numerele $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, n impar și $a \in \mathbb{R}, a < 0$. Numim *radical de ordin n* (n impar) al numărului real negativ a, unicul număr real negativ t a cărui putere de exponent n este numărul a (foarte apropiat de a, mai mic sau egal cu a).

$\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$, unde $t < 0$.

Proprietățile radicalilor

Fie numerele $m, n, p \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \geq 2$ și $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$.

1) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ 2) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ 3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ 6) $\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Formulele radicalilor compuși (suprapuși)

Dacă $a, b \in [0, +\infty)$, $a^2 \geq b$ și $c = \sqrt{a^2 - b}$, atunci sunt adevărate relațiile și avem echivalența:

1) $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$ 2) $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} - \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$.

Probleme rezolvate

1. Ordonați crescător numerele: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[12]{60}$.

Rezolvare: Folosim formula $\sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x^m}$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Avem: $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{16}$.

Rezultă: $\sqrt[6]{4}, \sqrt[12]{60}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}$.

2. Determinați numărul $x \in (0, +\infty)$ care verifică egalitatea: $\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}}$.

Rezolvare: Avem $x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$.

$2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8x}; \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{8x} = (8x)^{\frac{1}{9}}$.

Rezultă că: $x^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^{\frac{23}{36}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{36}{23}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{12}{23}}$.

3. Fie $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ și $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Calculați $p(x_0)$.

Rezolvare: Cu ajutorul formulei $(a-1)^3$, $p(x)$ se mai poate scrie:

$p(x) = (x-1)^3 - 6x$. Astfel putem calcula:

$p(x_0) = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 2 + 4 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 0.$

4. Demonstrați că există $x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$.

Rezolvare: Cu ajutorul formulei $(a+1)^3$, membrul drept al ecuației se mai poate scrie: $2x^3 + (x+1)^3 = 0$. Aplicăm formula $a^3 + b^3$ și obținem:

$(\sqrt[3]{2}x + x + 1)(a^2 + b^2 - ab) = 0$, unde $a = \sqrt[3]{2}x$, $b = x + 1$ și $a^2 + b^2 - ab \neq 0$.

Rezultă că $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Probleme propuse

1. Calculați valorile următorilor radicali:

a) $\sqrt{9}$; b) $\sqrt{196}$; c) $\sqrt[3]{8}$; d) $\sqrt[3]{216}$;

e) $\sqrt[4]{81}$; f) $\sqrt[4]{625}$; g) $\sqrt[5]{1}$; h) $\sqrt[5]{100000}$.

2. Calculați valorile următorilor radicali:

a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-343}$; c) $\sqrt[5]{-32}$; d) $\sqrt[5]{-243}$;

e) $\sqrt[7]{-1}$; f) $\sqrt[7]{-10000000}$; g) $\sqrt[9]{-512}$; h) $\sqrt[9]{-0{,}000000001}$.

3. Stabiliți valorile următorilor radicali:

a) $\sqrt{2^{100}}$; b) $\sqrt{3^{40}}$; c) $\sqrt[3]{2^{60}}$; d) $\sqrt[3]{5^{21}}$;

e) $\sqrt[4]{7^{100}}$; f) $\sqrt[4]{11^{28}}$; g) $\sqrt[6]{7^{600}}$; h) $\sqrt[6]{10^{420}}$;

i) $\sqrt[3]{(-2)^{51}}$; j) $\sqrt[5]{(-3)^{1005}}$; k) $\sqrt[7]{(-5)^{707}}$; l) $\sqrt[9]{(-9)^{99}}$;

m) $\sqrt[4]{(-2)^{24}}$; n) $\sqrt[6]{(-3)^{78}}$; o) $\sqrt[8]{(-5)^{1000}}$; p) $\sqrt[10]{(-6)^{150}}$.

4. Calculați:

a) $\sqrt{36}+2\cdot\sqrt{0}-3\sqrt{16}$; b) $\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{-27}+5\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{1000}$;

c) $3\sqrt[4]{16}+2\sqrt[4]{625}-5\sqrt[4]{10000}$; d) $\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}+\sqrt[4]{\frac{1}{16}}+\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$;

e) $\sqrt[3]{0,000001}\cdot\sqrt[4]{5^8}\cdot\sqrt{16}$; f) $\frac{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt[6]{4096}\cdot\sqrt[4]{81}}$.

5. Determinați partea întreagă a următoarelor numere reale:

a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{83}$; c) $\sqrt[3]{26}$; d) $\sqrt[3]{28}$;

e) $\sqrt[4]{14}$; f) $\sqrt[4]{24}$; g) $\sqrt[3]{-11}$; h) $\sqrt[3]{-32}$;

i) $\sqrt[5]{-25}$; j) $\sqrt[5]{-40}$; k) $\sqrt[6]{1000}$; l) $\sqrt[6]{2000}$.

6. Determinați partea întreagă a numerelor reale:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

b) $\sqrt[3]{6},\ \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}},\ \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}$;

c) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{2003 radicali}},\ \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}_{\text{100 radicali}}$.

7. Pentru ce valori ale numărului $x\in\mathbb{R}$, au loc egalitățile?

a) $\sqrt{x^2}=x$; b) $\sqrt{x^2}=-x$; c) $\sqrt[3]{x^3}=x$; d) $\sqrt[3]{x^3}=-x$;

e) $\sqrt[4]{x^4}=x$; f) $\sqrt[4]{x^4}=-x$; g) $\sqrt[6]{(x+1)^6}=x+1$; h) $\sqrt[6]{(x+1)^6}=-x-1$;

i) $\sqrt[4]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{x^3}=2x-1$; j) $\sqrt[6]{(x-1)^6}+\sqrt[5]{x^5}=1$.

8. Pentru ce valori ale numărului $x\in\mathbb{R}$, sunt definite următoarele expresii?

a) $\sqrt{x^2-3x}$; b) $\sqrt{-x^2+3x-2}$; c) $\sqrt[4]{2x-1}$;

d) $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$; e) $\sqrt[3]{x^2+x-2}$; f) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2-4x+3}}$;

g) $\sqrt[5]{\frac{1}{x-1}}$; h) $\sqrt[6]{x^2-x+1}$; i) $\sqrt[8]{\frac{x^2-4}{x^2-9}}$;

5. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale

Breviar de teorie

- Se numește *ecuație* (respectiv *inecuație*) *irațională* orice ecuație (respectiv inecuație) în care necunoscuta se află sub cel puțin un radical.

Exemple: $\sqrt{x-1}=2$, $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=3$; $\sqrt{x+1}\geq x$.

- Prima etapă în cadrul rezolvării ecuațiilor (respectiv inecuațiilor) iraționale este punerea condițiilor de existență a radicalilor (pentru radicalii de ordin par).
- Pentru rezolvarea ecuațiilor iraționale se pun și condiții de compatibilitate a acestora (ambii membri ai ecuației trebuie să aibă același semn).
- Metoda obișnuită de rezolvare a ecuațiilor (respectiv a inecuațiilor) iraționale constă în eliminarea radicalilor, fie ridicând ambii membri la puteri convenabile, fie efectuând diferite substituții pentru a reduce ecuațiile (respectiv inecuațiile) iraționale la ecuații (respectiv inecuații) deja studiate (de exemplu, ecuațiile de gradul I sau II sau inecuațiile de gradul I sau II).
- Ultima etapă în cadrul rezolvării ecuațiilor iraționale constă în verificarea soluțiilor obținute atât în ecuația inițială, cât și în domeniul de existență al ecuației adică efectuarea probei (pentru a fi convinși că „soluțiile obținute” nu sunt *soluții străine*, introduse prin ridicarea la putere a ecuației iraționale).

Probleme rezolvate

1. Rezolvați în $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ următoarea ecuație irațională: $x=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{x+2}}$.

Rezolvare:

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Ridicăm ecuația la cub în ambii membri și obținem: $x^3=\dfrac{2x+1}{x+2}$ sau

$x^4+2x^3-2x-1=0$ sau $(x^2-1)(x^2+1)+2x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+1)^2=0$.

Mulțimea soluțiilor este $\{-1, 1\}$.

Observație: fiind o ecuație de gradul patru, are patru rădăcini, adică $x_1=x_2=x_3=-1, x_4=1$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarea ecuație irațională: $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=4$.

Rezolvare:

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Ridicăm ecuația la cub în ambii membri și obținem:

$$8+x+8-x+3\sqrt[3]{8+x}\cdot\sqrt[3]{8-x}\cdot\left(\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}\right)=4\Rightarrow$$
$$8+x+8-x+3\sqrt[3]{8+x}\cdot\sqrt[3]{8-x}\cdot 4=64\Rightarrow 16+3\sqrt[3]{8+x}\cdot\sqrt[3]{8-x}\cdot 4=64\Rightarrow$$
$3\sqrt[3]{8+x}\cdot\sqrt[3]{8-x}=12\Rightarrow\sqrt[3]{64-x^2}=4$ sau $64-x^2=64$, deci $x^2=0$.

Această ecuație de gradul al doilea are rădăcinile $x_1=x_2=0$.

Mulțimea soluțiilor este $\{0\}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarea ecuație irațională: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-1}=0$.

Rezolvare:

Domeniul de existență este dat în ipoteză.

Dacă $a+b+c=0$, atunci, din dezvoltarea

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$,

obținem: $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Efectuăm substituțiile: $a=\sqrt[3]{x+1}, b=\sqrt[3]{x+2}, c=\sqrt[3]{x-1}, a,b,c\in\mathbb{R}$, deoarece radicalii sunt de ordin impar.

Rezultă $x+1+x+2+x-1=3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x-1)}$ sau

$$(3x+2)^3=27(x+1)(x+2)(x-1)\Leftrightarrow$$
$$27x^3+54x^2+36x+8=27(x^2-1)(x+2)\Leftrightarrow 36x+8=-27x-54\Leftrightarrow x=-\frac{62}{63}.$$

Verificare:

Prin calcul direct rezultă că $x=-\frac{62}{63}$ este soluția unică a ecuației.

4. Rezolvați inecuația irațională: $\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}\le 5$.

Rezolvare:

Domeniul de existență este $\begin{cases}3x\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$.

Ridicăm inegalitatea la pătrat: $3x+x+1+2\sqrt{3x(x+1)}\le 25$ sau

$$2\sqrt{3x(x+1)}\le 24-4x\Leftrightarrow\sqrt{3x(x+1)}\le 12-2x.$$

Inegalitatea este valabilă numai dacă $12-2x\ge 0$, deoarece membrul stâng este pozitiv. Deci $x\in(-\infty, 6]$ și cum $x\in[0,+\infty)$, obținem $x\in[0, 6]$.

Ridicăm inegalitatea precedentă la pătrat și obținem:

$3x(x+1)\le 144-48x+4x^2\Leftrightarrow$

$x^2-51x+144\ge 0\Leftrightarrow(x-3)(x-48)\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty, 3]\cup[48,+\infty)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației date se determină rezolvând sistemul:

$\begin{cases}x\in[0,+\infty)\\ x\in(-\infty,6]\\ x\in(-\infty,3]\cup[48,+\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in[0, 3]$. Mulțimea soluțiilor este $[0, 3]$.

Probleme propuse

1. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{2x-1}=5$; c) $\sqrt{3x-2}=-3$;

d) $\sqrt{x^2-7}=3$; e) $\sqrt{2x^2+x+4}=\sqrt{7}$; f) $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}$.

2. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt[3]{x-1}=2$; b) $\sqrt[3]{3x-2}=1$; c) $\sqrt[3]{2x-3}=-5$;

d) $2\sqrt[3]{x+7}=0$; e) $\sqrt[3]{x^2-2x}=-1$; f) $\sqrt[3]{2x^2-5x+4}=\sqrt[3]{2}$.

3. Rezolvați următoarele ecuații iraționale ($n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$):

a) $\sqrt[4]{x-2}=2$; b) $\sqrt[4]{2x^2-x+3}=-1$; c) $\sqrt[5]{5x-2}=3$;

d) $\sqrt[5]{x^2-x-1}=-1$; e) $\sqrt[n]{2x+3}=1$; f) $\sqrt[2n+1]{3x+2}=-1$.

4. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-1}$; b) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-3}$; c) $\sqrt[4]{x^2-3}=\sqrt{x-2}$;

d) $\sqrt[4]{2x^2-3x+1}=\sqrt{x+1}$; e) $\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{3x-1}$; f) $\sqrt[3]{2x^2-x+1}=\sqrt[3]{x^2+1}$;

g) $\sqrt[6]{3x^2-x+4}=\sqrt[3]{x-2}$; h) $\sqrt[6]{2x^2-4}=\sqrt[3]{x}$.

5. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt{1-x}=x+1$; b) $3\sqrt{x+1}=x+1$;

c) $\sqrt{1+x^2}=x+1$; d) $\sqrt{4-x^2}=1-x$;

e) $\sqrt{x^2-3x+2}=3-x$; f) $\sqrt{x^2+9}+x-7=0$.

6. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt{x-2}-\sqrt{3-x}=1$; b) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}=1$; d) $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+7}=2$;

e) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}=3$; f) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$;

g) $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-3}=3$; h) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=x$.

7. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+16}$; b) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-9}$;

c) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+6}$; d) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}-1$;

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x}+\sqrt{x+16}$; f) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+1}=2\sqrt[4]{2x^2-x-1}$.

8. Rezolvați următoarele ecuații iraționale:

a) $\dfrac{2\sqrt{x+1}+3\sqrt{x-2}}{3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}=1$; b) $\dfrac{2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+10}}{3\sqrt{x+3}-\sqrt{x+10}}=2$;