CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA - GEORGIA NICOLESCU

MATEMATICĂ

clasa a XII-a

- ALGEBRĂ SUPERIOARĂ
- ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă

ROMANIA · EDITURA ȘI TIPOGRAFIA · ICAR · EDITURA ȘI TIPOGRAFIA

CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

** E – enunțuri*
*** R – răspunsuri, rezolvări*

ANALIZĂ MATEMATICĂ

* *E – enunțuri*

** *R – răspunsuri, rezolvări*

* *E – enunțuri*

** *R – răspunsuri, rezolvări*

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I Legi de compoziție

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă

Breviar de teorie

Lege de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție* (sau operație algebrică) definită pe M, o aplicație $\varphi : M \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, un unic element $\varphi(x, y) \in M$.

Observații:

1. Elementul $\varphi(x, y)$ se numește *compusul* lui x cu y.
2. În general, operația $\varphi(x, y)$ se va desemna printr-un simbol special: $*$, $\circ$, $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\odot$ etc. De asemenea, se poate utiliza notația aditivă (+) sau notația multiplicativă $(\cdot)$.

Parte stabilă

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „$\circ$" o lege de compoziție pe M. O submulțime nevidă $H \subseteq M$ se numește *parte stabilă a lui M în raport cu operația „$\circ$"*, dacă pentru orice $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

Observații:

1. Numele de „parte stabilă" pentru o submulțime H a lui M în raport cu operația „$\circ$" precizează că dacă $x, y \in H$, atunci și compusul lor $x \circ y$ rămâne în H.
2. Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „$\circ$", atunci spunem că $(H, \circ)$ este o *lege de compoziție indusă de legea de compoziție* de pe M.

Clase de resturi modulo n ($\mathbb{Z}_n$)

Definiție. Fie un număr $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că *a este congruent cu b modulo n* și scriem $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $n \mid (a - b)$ sau dacă $\dfrac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$.

Altfel spus: *numărul a este congruent cu numărul b modulo n*, dacă și numai dacă dau același rest r, prin împărțire la n:

$$a \equiv b \pmod n \Rightarrow \begin{cases} a = nq_1 + r \\ b = nq_2 + r \end{cases}, q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}, 0 \le r < n.$$

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}$.

- Restul împărțirii lui a la n se numește *redusul modulo n al numărului a* și se notează a (modulo n) sau $a(\text{mod } n)$.

- Notăm: $\hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a(\text{mod } n)\}$.

$\hat{a} = \widehat{a \bmod n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$, unde $\hat{a}$ se numește *clasa lui a modulo n*.

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, ..., \widehat{n-1}\}$ se numește *mulțimea claselor de resturi modulo n.*

- Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$„+”: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b};$$

$$„\cdot”: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}.$$

Cum pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, avem $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \widehat{a \bmod n} = \widehat{b \bmod n} \Leftrightarrow$ $a(\text{mod}n) = b(\text{mod}n) \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow a \equiv b(\text{mod } n)$.
Deci $a \oplus b = (a + b)\text{mod}n$ și $a \odot b = (ab)\text{mod}n$.

În concluzie: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{a+b}$ și $\hat{a}\hat{b} = \widehat{a \odot b} = \widehat{ab}$.

Tabla unei legi de compoziție

Dacă „$\circ$” este o lege de compoziție pe M, iar mulțimea M este finită, $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, atunci legea poate fi redată printr-un tablou, numit *tabla operației „$\circ$”*, astfel:

$\circ$	x_1	x_2		x_j		x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	...	$x_1 \circ x_j$	...	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	...	$x_2 \circ x_j$	...	$x_2 \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_i	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	...	$x_i \circ x_j$	...	$x_i \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	...	$x_n \circ x_j$	...	$x_n \circ x_n$

În acest tabel, elementul $x_i \circ x_j$ este situat pe linia i și coloana j.

1. Considerăm mulțimea $M = [2, +\infty)$.

a) Să se arate că operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, definește pe M, o lege de compoziție.

b) Să se calculeze numerele $a = 2 \circ 3$ și $b = (-1) \circ 4$.

Rezolvare:

a) Pentru a demonstra că legea este o operație algebrică, trebuie să arătăm că pentru orice numere $x \geq 2$, $y \geq 2$, avem $x \circ y \geq 2$.
Scriem echivalent: $x \circ y \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 \geq 0$ $\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) \geq 0$, ultima inegalitate fiind evidentă, deoarece $x \geq 2$ și $y \geq 2$.
b) $a = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 6 = 2$ și $b = (-1) \circ 4 = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) -$ $- 2 \cdot 4 + 6$, deci $b = -4$.

2. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și legea „$\circ$" definită astfel:

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{dacă } x \leq 2,\ y \leq 2 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2 \\ y - x, & \text{dacă } x \leq 2,\ y > 2 \end{cases}.$$

a) Efectuând tabla operației, să se deducă că operația „$\circ$" determină pe M o lege de compoziție.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 4$ și $1 \circ x = 2$.

Rezolvare:

a) Din tabla operației, prezentată alăturat, deducem că operația „$\circ$" este algebrică pe M.
b) Din tabla operației deducem că:
$x \circ 2 = 4 \Rightarrow x = 2$, iar din $1 \circ x = 2 \Rightarrow x \in \{2, 3\}$.

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	4
1	0	1	2	2	3
2	0	2	4	1	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3

3. Fie mulțimea $M = [2, 4] \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Să se arate că M este parte stabilă față de legea „$\circ$".

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 3, x \in M$ și apoi $3 \circ x = 3, x \in M$.

Rezolvare:

a) Se observă că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Ținând cont că pentru $x \in [2, 4]$, $y \in [2, 4]$, avem că $x - 3 \in [-1, 1]$ și $y \in [-1, 1]$, deducem că $(x - 3)(y - 3) \in$ $\in [-1, 1]$ și în final că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3 \in [2, 4]$. În concluzie

mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de „$\circ$".
b) $x \circ 2 = 3 \Rightarrow 2x - 3x - 3 \cdot 2 + 12 = 3 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$.
$3 \circ x = 3 \Rightarrow 3x - 9 - 3x + 12 = 3 \Rightarrow 3 = 3$, deci ecuația are o infinitate de soluții, adică $S = [2, 4]$.

4. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$.

a) Să se efectueze $\hat{2}+\hat{3}$ și $\hat{2}\cdot\hat{3}$.

b) Să se rezolve ecuațiile $x+\hat{4}=\hat{1}$ și $\hat{4}x=\hat{1}$.

c) Să se rezolve ecuația: $\hat{2}\cdot x+\hat{4}=\hat{3}$.

Rezolvare:

a) $\hat{2}+\hat{3}=\widehat{2+3}=\hat{5}=\widehat{1\cdot 5+0}=\hat{1}\cdot\hat{5}+\hat{0}=\hat{1}\cdot\hat{0}+\hat{0}=\widehat{1\cdot 0}+\hat{0}=\hat{0}+\hat{0}=\widehat{0+0}=\hat{0}$.

$\hat{2}\cdot\hat{3}=\widehat{2\cdot 3}=\hat{6}=\widehat{1\cdot 5+1}=\hat{1}$ (deoarece restul împărțirii lui 6 la 5 este 1).

b) Studiind tabla operației ($\mathbb{Z}_5$, +), deducem că soluția ecuației $x+\hat{4}=\hat{1}$ este $x=\hat{2}$; studiind apoi tabla operației ($\mathbb{Z}_5$, ·), deducem că soluția ecuației $\hat{4}x=\hat{1}$ este $x=\hat{4}$.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

c) $\hat{2}x+\hat{4}=\hat{3}\Rightarrow\hat{2}x=\hat{3}-\hat{4}=\widehat{3-4}=\widehat{-1}=\widehat{0-1}=\widehat{5-1}=\hat{4}\Rightarrow\hat{2}x=\hat{4}\Rightarrow x=\hat{2}$.

Probleme propuse

1. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.
a) $x \circ y = \min(x, y)$;
b) $x \circ y =$ c.m.m.d.c.(x, y);
c) $x \circ y =$ c.m.m.m.c.(x, y).

2. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, în următoarele cazuri:
a) $x \circ y = \max(x, y)$;

b) $x \circ y = |x - y|$;
c) $x \circ y = x$.

3. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se consideră legea de compoziție „$\circ$" a cărei tablă este reprezentată alăturat.

a) Să se determine următoarele elemente:
$a = 1 \circ 3$, $b = 3 \circ 5$; $c = 4 \circ 2$; $d = 5 \circ 4$.

b) Să se rezolve următoarele ecuații:
i) $x \circ 3 = 1$; ii) $2 \circ x = 4$;
iii) $x \circ 5 = 3$; iv) $4 \circ x = 2$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3 \circ x = 3 \\ x \circ y = 4 \end{cases}$.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	2	1	5	4	3
3	3	4	3	5	2
4	1	2	1	2	3
5	5	5	2	3	4

4. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |y - x|$.

a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 3 = 0$ și $2 \circ x = 1$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x \circ y = 0 \\ y \circ 1 = 2 \end{cases}$.

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$x \top y = x + y + 1 \text{ și } x \perp y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 1.$$

a) Să se calculeze $8 \top 27$ și $8 \perp 27$.

b) Să se rezolve ecuația: $x \top 1 = x \perp 27$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x \top y = 65 \\ x \perp y = 3 \end{cases}$.

6. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 3$;
b) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y = |x - y|$;
c) $M = [-5, +\infty)$, $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20$;
d) $M = (-3, +\infty)$, $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$;
e) $M = (1, +\infty)$, $x \circ y = xy - x - y + 2$;
f) $M = (2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

7. Să se arate că în fiecare dintre cazurile următoare, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$;

b) $M = (0, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$;