ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

NUMERE REALE. PARTEA ÎNTREAGĂ ŞI PARTEA FRACŢIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL. MODULUL UNUI NUMĂR REAL. INTERVALE DE NUMERE REALE. RAŢIONALIZAREA NUMITORULUI DE FORMA $a\sqrt{b}$ ŞI $a \pm \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$. FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

(Temă pentru centrul de excelență)

➲ **Să ne reamintim!**

• **Din Olimpiade, Concursuri şi Centre de excelenţă, clasa a VII-a, ediţia 2014, Editura Taida, Iași, recapitulaţi şi aprofundaţi.**

· Proprietățile divizibilității în $\mathbb{Z}$ (Capitolul I)
· Relaţia de congruenţă modulo m (Capitolul II)
· Proprietățile modulului unui număr real (Capitolul III)
· Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real (Capitolul III)
· Formule de calcul prescurtat (Capitolul IV)

➲ ***Partea întreagă*** a unui număr real x este un număr întreg, notat $[x]$, astfel încât să avem : $[x] \le x < [x] + 1$.

➲ Partea întreagă a unui număr real x este un număr întreg notat $[x]$, astfel încât să avem: $x = [x] + \{x\}$, unde $0 \le \{x\} < 1$; $\{x\}$ se numeşte ***partea fracţionară*** a numărului real x.

Probleme rezolvate:

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $|x - 2| = 3|x|$.

Rezolvare:

Avem: $|x-2| = \begin{cases} -x+2, \text{ dacă } x<2 \\ 0, \text{ dacă } x=2 \\ x-2, \text{ dacă } x>2 \end{cases}$. Dacă $x < 0$, atunci ecuația devine $-x + 2 = -3x$, de unde $x = -1$, soluție. Dacă $x \in [0, 2)$, atunci ecuația devine $-x + 2 = 3x$, de unde $x = \frac{1}{2}$, soluție. Dacă $x \ge 2$, atunci ecuația devine $x - 2 = 3x$, de unde $x = -1$, contradicție!

Prin urmare, $x \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $||x + 2| - |x - 1|| = x + 3$.

Rezolvare:

Avem: $|x+2| = \begin{cases} -x-2, \text{ dacă } x<-2 \\ x+2, \text{ dacă } x\ge -2 \end{cases}$ și $|x-1| = \begin{cases} -x+1, \text{ dacă } x<1 \\ x-1, \text{ dacă } x\ge 1 \end{cases}$. Analizăm cazurile: $x < -2$, $x \in [-2; 1)$ și $x \ge 1$.

• Dacă $x < -2$ atunci avem $|-x - 2 - (-x + 1)| = x + 3$, de unde $x = 0$, cum $0 > -2$, contradicție!

• Dacă $x \in [-2; 1)$ avem: $|x + 2 - (-x + 1)| = x + 3 \Leftrightarrow |2x + 1| = x + 3$. Cum $|2x + 1| =$

$= \begin{cases} -2x-1, \text{ dacă } x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1, \text{ dacă } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, analizăm cazurile: • $x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right)$ conduce la $-2x - 1 = x + 3$,

de unde $x = -\frac{4}{3}$, soluție, pentru că $-\frac{4}{3} \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right)$; • $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$ conduce la $2x + 1 =$

$= x + 3$, de unde $x = 2$. Însă $2 \notin \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Dacă $x \geq 1$, atunci avem: $|x + 2 - (x - 1)| = x + 3 \Leftrightarrow x + 3 = 3$, de unde $x = 0$. Însă $0 \geq 1$, contradicție! Prin urmare, ecuația din enunț are soluția $-\frac{4}{3}$.

3. Media geometrică și media aritmetică a două numere naturale distincte a și b sunt numerele $\overline{xy}$ și, respectiv, $\overline{yx}$ scrise în baza zece. Claculați $|a - b|$.

(Concursul „Alexandru Papiu-Ilarian, Târgu Mureș, 2011)

Rezolvare:

Din $\frac{a+b}{2} = \overline{yx}$ și $\sqrt{ab} = \overline{xy}$ rezultă că $(a + b)^2 = 4 \cdot \overline{yx}^2$ și $4ab = 4 \cdot \overline{xy}^2$, de unde $a^2 - 2ab + b^2 = 4\,\overline{yx}^2 - 4\,\overline{xy}^2 = 4 \cdot (\overline{yx} - \overline{xy}) \cdot (\overline{yx} + \overline{xy}) = 4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot (y - x)(y + x) = (a - b)^2$. Deci $(y - x)(y + x) = 11k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$) și $(y - x)(y + x) \in \{11, 44, 99\}$. $(y - x)(y + x) = 11$ implică $y - x = 1$ și $y + x = 11$, de unde $y = 6$ și $x = 5$, iar $(a - b)^2 = 36 \cdot 11 \cdot 11$, de unde $|a - b| = 66$. $(y - x)(y + x) = 44 = 4 \cdot 11$ implică $y - x = 4$ și $y + x = 11$, de unde $y = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$. $(y - x)(y + x) = 99 = 9 \cdot 11$ implică $y = 10$, nu convine. Prin urmare, $|a - b| = 66$.

4. Arătați că $\sqrt{|a^2-1||b^2-1|} \leq |1+ab| + |a+b|$, oricare ar fi numerele reale a și b.

Rezolvare:

Aplicând inegalitățile $|x| + |y| \geq |x + y|$ și $|x| + |y| \geq |x - y|$ avem: $|1 + ab| + |a + b| \geq$ $\geq |1 + ab + a + b|$ și $|1 + ab| + |a + b| \geq |1 + ab - a - b|$, de unde rezultă că$(|1 + ab| + |a + b|)^2 \geq$ $\geq |(1 + ab)^2 - (a + b)^2| = |a^2 - 1| \cdot |b^2 - 1|$. Deci, $|1 + ab| + |a + b| \geq \sqrt{|a^2-1| \cdot |b^2-1|}$.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{[x]+\{x\}}{2} = [x]$; **b)** $\left[\frac{10x+2}{6}\right] = \frac{5x+6}{2}$; **c)** $x + 1 = 4\{x\} + [x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ partea fracționară a lui x.

Rezolvare:

a) Ecuația dată este echivalentă cu $[x] = 2\{x\}$. Deci, $[x] = 2 \cdot (x - [x])$, de unde $x = \frac{3}{2} \cdot [x]$.

Însă din $[x] \leq x < [x] + 1$ (definiție) rezultă $[x] \leq \frac{3}{2}[x] < [x] + 1$, de unde $[x] \geq 0$ și $[x] \in \{0; 1\}$.

$[x] = 0$ și $\{x\} = 0$ implică $x = 0$. Din $[x] = 1$ și $\{x\} = \frac{1}{2}$ rezultă $x = \frac{3}{2}$. Prin urmare, $x \in \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

b) Notăm $\frac{5x+6}{2} = k$, $k \in \mathbb{N}$ și obținem $x = \frac{2k-6}{5}$, **(1)**. Înlocuind, se obține ecuația $\left[\frac{2k-5}{3}\right] = k$. Aplicând una din definiții avem: $k \leq \frac{2k-5}{3} < k + 1$, de unde $k \in \{-7; -6; -5\}$.

Acum, din **(1)** se obțin soluțiile $x \in \left\{-4; -\frac{18}{5}; -\frac{16}{5}\right\}$.

c) Avem $x + 1 = 4(x - [x]) + [x] \Leftrightarrow x = \frac{3[x]+1}{3}$. Însă, $[x] < \frac{3[x]+1}{3} < [x] + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deci, soluțiile ecuației sunt de forma $n + \frac{1}{3}$, unde $n \in \mathbb{Z}$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\{x\}^{2013} - [x]^{2013} = x^{2013}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și, respectiv, partea fracționară a numărului real x.

Rezolvare:

Avem $0 \leq \{x\}^{2013} < 1$, deci $0 \leq [x]^{2013} + x^{2013} < 1$, **(1)**. Dacă $x < 0$, atunci $[x] < 0$ și am avea $[x]^{2013} + x^{2013} < 0$ în contradicție cu relația **(1)**. Deci $x \geq 0$ și în acest caz din **(1)** rezultă că $[x] = 0$, iar $x = \{x\}$, de unde $x \in [0; 1)$.

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația: $x[x] + 2011x - 2013 \cdot 2011 \leq 2013 \cdot [x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Rezolvare:

Inecuația din enunț este echivalentă cu: $(x - 2013) \cdot ([x] + 2011) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 \leq 0 \\ [x] + 2011 \geq 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x - 2013 \geq 0 \\ [x] + 2011 \leq 0 \end{cases}$. Din $x - 2013 \leq 0$ și $[x] + 2011 \geq 0$ rezultă $x \in [-2011; 2013]$. Din $x - 2013 \geq 0$ și $[x] + 2011 \leq 0$ rezultă $x \geq 2013$ și $x \leq -2011$. Deci în acest caz $x \in \Phi$. Prin urmare, soluțiile inecuației aparțin intervalului $[-2011; 2013]$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația: $\min\{6x, |x|\} \leq 3x - 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Rezolvare:

Utilizând relația $\min(m, n) = \frac{(m+n) - |m-n|}{2}$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{R}$ (se demonstrează analizând cazurile $m < n$ și $m \geq n$), obținem inecuația: $\frac{6x + |x| - |6x - |x||}{2} \leq 3x - 1$ sau $|x| - |6x - |x|| \leq -2$. Dacă $x \leq 0$, atunci avem: $-x - |6x + x| \leq -2 \Leftrightarrow -x + 7x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$. Deci $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, soluție. Dacă $x > 0$, atunci avem: $x - 5x \leq -2$, de unde $x \geq \frac{1}{2}$, deci $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, soluție. Prin urmare, $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) = \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

9. Se dă mulțimea A = $\left\{n \in \mathbb{N} \,/\, \left[\sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{n}\right],\ n \le 2013\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Aflați cardinalul mulțimii A.

(Concursul „Dimitrie Pompeiu", Botoșani, ediția a XIII-a, 2013, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

Dacă $n \in \{0, 2, 3\}$, atunci $\left[\sqrt{n}\right] \neq \left[n+2\right]$. Dacă $n = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left[\sqrt{n}\right] = k$ și $\left[\sqrt{n+2}\right] = k$, fiindcă $k \leqslant \sqrt{k^2+2} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant k^2+2 < k^2+2k+1$. Dacă $k^2 < n \leqslant (k+1)^2 - 3$, unde $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, atunci $\left[\sqrt{n}\right] = k$ și $\left[\sqrt{n+2}\right] = k$. Într-adevăr, din $k < \sqrt{n} \leqslant \sqrt{(k+1)^2-3}$ rezultă $k < \sqrt{n} \leqslant \sqrt{(k+1)^2-3} < k+1$, deci $\left[\sqrt{n}\right] = k$, iar $k^2 < n \leqslant (k+1)^2 - 3$ implică $k^2 + 2 < n + 2 \leqslant (k+1)^2 - 1$, de unde $\sqrt{k^2+2} < \sqrt{n+2} \leqslant \sqrt{(k+1)^2-1}$. Deci $k < \sqrt{k^2+2} < \sqrt{n+2} \leqslant \sqrt{(k+1)^2-1} < k+1$ și $\left[\sqrt{n+2}\right] = k$. Dacă $n = (k+1)^2 - 2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left[\sqrt{n}\right] = k$ și $\left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$. Într-adevăr, $k \leqslant \sqrt{(k+1)^2-2} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant k^2+2k-1 < (k+1)^2$ și $k+1 \leqslant \sqrt{(k+1)^2} < k+2$. Dacă $n = (k+1)^2 - 1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left[\sqrt{n}\right] = k$ și $\left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$, fiindcă $k \leqslant \sqrt{(k+1)^2-1} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant k^2+2k < k^2+2k+1$ și $k+1 \leqslant \sqrt{(k+1)^2+1} < (k+2)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k^2+2k+1 \leqslant k^2+2k+2 < k^2+4k+4$. Conchidem că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ și $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - 3$, obținem elemente ale mulțimii A, iar pentru $n \in \{(k+1)^2-2;\ (k+1)^2-1\}$ avem $\left[\sqrt{n}\right] \neq \left[\sqrt{n+2}\right]$, unde $1 \leqslant k \leqslant 43$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Prin urmare, card A $= 2014 - (43 \cdot 2 + 1) = 1927$.

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile: **a)** $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right] = 2013$;

b) $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right] = 2014$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

(Concursul „Gh. Mihoc", Slobozia, 2013, Nicolae Papacu)

Rezolvare:

a) Aplicând definiția părții întregi a unui număr real se obține: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-\left\{\frac{x}{2}\right\}-\left\{\frac{x}{3}\right\}-\left\{\frac{x}{6}\right\} = 2013 \Leftrightarrow x = 2013 + \left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{6}\right\}$. Cum $\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{6}\right\} < 3$ rezultă că $x < 2016$. Analizăm cazurile:

I. $x = 2015 + r$, unde $0 \le r < 1$, adică $r = \{x\}$. Avem $\left[\frac{2015+r}{2}\right]+\left[\frac{2015+r}{3}\right]+\left[\frac{2015+r}{6}\right] =$ $= 2013$ sau $\left[1007+\frac{r+1}{2}\right]+\left[671+\frac{r+2}{3}\right]+\left[335+\frac{5+r}{6}\right] = 2013$, de unde $2013+\left[\frac{r+1}{2}\right]+\left[\frac{r+2}{3}\right]+\left[\frac{r+5}{6}\right] = 2013$, soluție pentru că $\left[\frac{r+1}{2}\right] = \left[\frac{r+2}{3}\right] = \left[\frac{r+5}{6}\right] = 0$, oricare ar fi $0 \le r < 1$.

II. $x = 2014 + r$, unde $0 \le r < 1$. Avem $\left[\frac{2014+r}{2}\right]+\left[\frac{2014+r}{3}\right]+\left[\frac{2014+r}{6}\right] = 2013$ sau $\left[1007+\frac{r}{2}\right]+\left[671+\frac{r+1}{3}\right]+\left[335+\frac{r+4}{6}\right] = 2013$, soluție.

III. $x < 2014$, conduce la $\left[\frac{x}{2}\right] \le 1006$, $\left[\frac{x}{3}\right] \le 671$ și $\left[\frac{x}{6}\right] \le 335$, de unde $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right] \le$ ≤ 2012, contradicție! Prin urmare, $x \in [2014, 2016)$.

b) Se arată ca la punctul **a)** că $x < 2017$. Cazul $x = 2016 + r$, $0 \le r < 1$ conduce la $\left[\frac{x}{2}\right] = 1008$, $\left[\frac{x}{3}\right] = 672$ și $\left[\frac{x}{6}\right] = 336$ de unde $2016 = 2014$, fals. Pentru $x < 2016$, din **a)** rezultă că ecuația nu are soluție în $\mathbb{R}$. Deci $x \in \Phi$.

11. Numim *număr special* un număr de forma $a + b\sqrt{3}$ unde $a, b \in \mathbb{Z}$ și $a^2 - 3b^2 = 1$.
a) Să se arate că $7 + 4\sqrt{3}$ este un *număr special*.
b) Să se demonstreze că produsul a două *numere speciale* este un *număr special*.
c) Să se justifice faptul că există o infinitate de *numere speciale*.

(Concursul „Unirea“, Focșani, 2013)

Rezolvare:

a) Avem $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$, deci $7 + 4\sqrt{3}$ este un număr special.
b) Dacă numerele $a_1 + b_1\sqrt{3}$ și $a_2 + b_2\sqrt{3}$ sunt numere speciale atunci avem: $(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}$. $a_1^2 - 3b_1^2 = 1$ și $a_2^2 - 3b_2^2 = 1$, de unde $(a_1^2 - 3b_1^2)(a_2^2 - 3b_2^2) = a_1^2a_2^2 + 9b_1^2b_2^2 - 3a_1^2b_2^2 - 3a_2^2b_1^2 = 1$, **(1)**. Însă, $(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}$ și $(a_1a_2 + 3b_1b_2)^2 - 3(a_1b_2 + a_2b_1)^2 =$ $= a_1^2a_2^2 + 9b_1^2b_2^2 + 6\cancel{a_1a_2b_1b_2} - 3a_1^2a_2^2 - 6\cancel{a_1a_2b_1b_2} - 3a_2^2b_1^2$, **(2)**. Din **(1)** și **(2)** rezultă că produsul a două numere speciale este număr special.
c) Ecuația $a^2 - 3b^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi (ecuația de tip **Pell**) etc.

12. $S_n = 1 + \frac{a_1}{1-a_1} + \frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)} + \ldots + \frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)}$, unde $a_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{\mathbf{1}\}$, $i = \overline{1,n}$. Determinați numerele întregi a_1, $i = \overline{1,n}$ pentru care S_n este număr natural.

(Concursul „Matematica de drag“, Bistrița, 2012, Nastasia Chiciudean)

Rezolvare:

$$S_n = \left(1+\frac{a_1}{1-a_1}\right)+\frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}+\ldots+\frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} = \left[\frac{1}{1-a_1}+\frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}\right]+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} = \frac{1-a_2+a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}+\frac{a_3}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)} = \ldots = \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdot\ldots\cdot(1-a_n)}.$$

$S_n \in \mathbb{N}$ dacă $1 - a_{i_1}$; $1 - a_{i_2}$; ...; $1 - a_{i_{2k}} \in \{-1\}$, iar $1 - a_{i_{2k+1}}$; $1 - a_{i_{2k+2}}$; ...; $1 - a_{i_p} \in \{1\}$, unde $2k + p = n$. Se obține $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_{2k}} = 2$ și $a_{i_{2k+1}} = a_{i_{2k+2}} = \ldots = a_{i_p} = 0$.

13. Fie numerele reale strict pozitive x, y z, t, u care satisfac relațiile:

$$x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2yz + z^2 = z^2 - 2zt + t^2 = t^2 - 2ut + u^2 = u^2 - 2ux + x^2.$$

Arătați că numerele x, y, z și t reprezintă lungimile laturilor unui patrulater convex ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare).

(Concursul Matematica „De drag“, Bistrița, 2012, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

Fie $|x - y| = k$. Deci $k \geq 0$, $k \in \mathbb{R}$. Avem: $(x - y)^2 = (y - z)^2 = (z - t)^2 = (t - u)^2 = (u - x)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x - y| = |y - x| = |z - t| = |t - u| = |u - x| = k$. Deci $|x - y| = \pm k$, $|y - x| = \pm k$. Prin urmare, $x - y = \pm k$, $y - z = \pm k$, $z - t = \pm k$, $t - u = \pm k$ și $u - x = \pm k$. Însă $(x - y) + (y - z) + (z - t) +$ $+ (t - u) + (u - x) = 0$, de unde $\pm k \pm k \pm k \pm k \pm k = 0$ sau $(\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1)k = 0$. Dar $\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \neq 0$, deci $k = 0$ și $x = y = t = u$. Patrulaterul convex cu lungimile laturilor x, y, z și t este romb, deci este ortodiagonal.

14. Să se determine toate intervalele I = $[a, b]$, $a < b$ care au proprietatea: pentru orice $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $y \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, rezultă $x + y \in$ I și $x \cdot y \in$ I.

(Concursul „Gheorghe Mihoc“, Slobozia, 2012, Nicolae Papacu)

Rezolvare:

Orice interval de forma $[-a, a]$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $|a| \leqslant 1$.

15. Arătați că nu există numere naturale x și y astfel încât:

$$(x^4 + y^4 - x^2y^2) \cdot (x^4 + y^4 + x^2y^2) = 2 \cdot 4^{1006}.$$

(Concursul „Vâlcovici“, Brăila, 2013, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

Presupunem prin absurd că există $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât: $(x_0^4 + y_0^4 - x_0^2y_0^2)\cdot(x_0^4 + y_0^4 + x_0^2y_0^2) = 2^{2013}$. Fie $d = (x_0, y_0)$. Deci există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât avem: $x_0 = d \cdot m$ și $y_0 = d \cdot n$ cu $(m, n) = 1$, **(1)**. Avem: $(x_0^4 + y_0^4 - x_0^2y_0^2)\cdot(x_0^4 + y_0^4 + x_0^2y_0^2) = (x_0^4 + y_0^4)^2 - x_0^4y_0^4 = x_0^8 + y_0^8 + x_0^4y_0^4 = 2^{2013}$, **(2).** Din **(1)** și **(2)** rezultă că $d^{\,8}(m^8 + n^8 + m^4n^4) = 2^{2013}$, de unde $d^{\,8} / 2^{2013}$, adică $d^8 = 2^{8p}$ cu $p \in \mathbb{N}$ și $p \leqslant 251$. Deci $m^8 + n^8 + m^4n^4 = 2^{2013 - 8p}$ și $2 / m^8 + n^8 + m^4n^4$, **(3)**. Însă din $(m, n) = 1$ rezultă că m și n au parități diferite. Dacă $m = 2k$ și $n = 2q + 1$, unde k, $q \in \mathbb{N}$, atunci $m^8 + n^8 + m^4n^4 = M_2 + 1$, în contradicție cu relația **(3)**. Analog, $m = 2a + 1$ și $n = 2b$, unde a, $b \in \mathbb{N}$ conduc la aceeași concluzie.

16. Pentru n număr natural, $n \geqslant 2$, se consideră suma:

S = $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}+\ldots+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$. Calculați suma $\text{S}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$.

(Concursul „Dimitrie Pompeiu“, Botoșani, 2013, ediția a XIII-a, G.M. 5/2012, enunț modificat)

Rezolvare:

a) Avem $\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+n}{n^2+n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n-2} + \frac{2}{n^2+n-2} = 1 + \frac{2}{(n-1)(n+2)} =$

$= 1 + \frac{2}{3(n-1)} - \frac{2}{3(n+2)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.

$n = 2 \Rightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4} = 1 + \frac{2}{3\cdot 1} - \cancel{\frac{2}{3\cdot 4}}$

$n = 3 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5} = 1 + \frac{2}{3\cdot 2} - \cancel{\frac{2}{3\cdot 5}}$

$n = 4 \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6} = 1 + \frac{2}{3\cdot 3} - \cancel{\frac{2}{3\cdot 6}}$

$n = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7} = 1 + \cancel{\frac{2}{3\cdot 4}} - \cancel{\frac{2}{3\cdot 7}}$

……………………………………………

$\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{n-2}{n-1} = 1 + \cancel{\frac{2}{3(n-4)}} - \cancel{\frac{2}{3(n-1)}}$

$\frac{n-2}{n-3}\cdot\frac{n-1}{n} = 1 + \cancel{\frac{2}{3(n-3)}} - \frac{2}{3n}$

$\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n}{n+1} = 1 + \cancel{\frac{2}{3(n-2)}} - \frac{2}{3(n+1)}$

$\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1 + \frac{2}{3(n-1)} - \frac{2}{3(n+2)}$.

Prin simplificare telescopică se obține: S = $n + \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$.

Deci S + $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = n + \frac{2}{9}$.

17. Fie n un număr natural. Determinați n, dacă $n + 49$ și $n - 49$ sunt cuburi perfecte.

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița 2013, G.M. 6-7-8, 2013, Aurel Doboșanu)

Rezolvare:

Fie $n + 49 = a^3$ și $n - 49 = b^3$, unde $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{Z}$.

Avem $a^3 - b^3 = 98 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 98$ **(1)**. Cum $a > b$ din **(1)** rezultă $a - b \in \{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$. $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$ și $(b + 1)^2 + b(b + 1) + b^2 = 98 \Leftrightarrow 3b^2 + 3b = 97 \Rightarrow 3/97$, fals. $a - b = 2 \Rightarrow (b + 2)^2 + b(b + 2) + b^2 = 49 \Leftrightarrow b^2 + 2b = 15 \Leftrightarrow (b + 1)^2 = 16$, de unde $b = 3$ și $a = 5$. $a - b \geq 7$, adică $a \geq b + 7$ conduce la $a^2 + ab + b^2 \leq 14$ fals. Deci $a = 5$, $b = 3$ și $n + 49 = 125$, adică $n = 76$.

18. Calculați $a = \sqrt{1 + 2010\cdot\sqrt{1 + 2011\cdot\sqrt{1 + 2012\cdot\sqrt{1 + 2013\cdot 2015}}}}$.

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița, 2013, Cătălin Budeanu)

Rezolvare:

$\sqrt{1 + \sqrt{2013\cdot 2015}} = \sqrt{1 + 2013^2 + 2\cdot 2013} = \sqrt{(1 + 2013)^2} = 2014$.

Analog $\sqrt{1 + 2012\cdot 2014} = \sqrt{(1 + 2012)^2} = 2013$ și $\sqrt{1 + 2011\cdot 2013} = 2012$.

Deci $a = \sqrt{1 + 2010\cdot 2012} = 2011$.

19. Se dă numărul $A = (n-5)(n-2)(n+2)(n-4)(n-3) - 1080$. Arătați că A se divide cu:

a) 12, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$;

b) $n - 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

(Concursul „Unirea“, 2014, Focșani, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

a) Numere întregi $n-5$, $n-4$, $n-3$ și $n-2$ sunt consecutive deci produsul lor se divide cu 3 și cu 4. Cum $(3, 4) = 1$, rezultă că 12 divide produsul lor, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

b) $A = [(n-5)(n-2)][(n-4)(n-3)](n+2) - 1080$

$A = (n^2 - 7n + 10)(n^2 - 7n + 12)(n+2) - 1080$

$A = [n(n-7) + 10][n(n-7) + 12](n+2) - 1080$

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 120[(n-7) + 9] - 1080$

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 1080 - 1080 = \mathcal{M}_{n-7}$.

Altă abordare:

$A = (n-5)(n-4)(n-3)(n-2)[(n-7) + 9] - 1080$

$A = 9(n-5)(n-4)(n-3)(n-2) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 9(n-5)(n-4)(n-3)(n-7+5) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 45(n-5)(n-4)(n-3) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 45(n-5)(n-4)(n-7+4) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 45 \cdot 4(n-5)(n-4) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 180(n-5)(n-7+3) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 540(n-5) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 540(n-7+2) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 1080 + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = \mathcal{M}_{n-7}$.

20. Fie numerele reale x, y, z pentru care au loc simultan relațiile:

i) $x + y + z = -a$ și **ii)** $xy + yz + zx = \dfrac{a^2 + 4a + 11}{2}$.

a) Găsiți o relație independentă de „a“ între x, y și z.

b) Stabiliți cărui interval de lungime 2, cu capete numere întregi, aparține fiecare dintre numerele x, y și z.

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița, 2013, Cătălin Budeanu)

Rezolvare:

a) $xy + yz + zx = \dfrac{a^2 + 4a + 11}{2} = \dfrac{(x+y+z)^2 - 4(x+y+z) + 11}{2}$.

b) Relația precedentă se mai scrie sub forma echivalentă.

$(x + y + z)^2 - 4(x + y + z) + 11 = 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 11 = 0$.

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2), (y-2), (z-2) \in [-1, 1] \;/ +2 \Rightarrow x, y, z \in [1, 3]$.

21. Rezolvați ecuația $\{x\} - \{2013 \cdot x\} = x$ în mulțimea numerelor reale.

(Concursul „Vasile Polesciuc“, Câmpulung Moldovenesc, 2013)

Rezolvare:

Avem $x = [x] + \{x\}$ și $0 \le \{x\} < 1$ de unde $-1 < \{x\} - \{2013x\} < 1$, adică $x \in (-1, 1)$.

Cazul 1: $x = 0$ este soluție.

Cazul 2: $x \in (0, 1) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x = \{x\}$. Ecuația devine $\{2013x\} = 0$ de unde $2013x \in \mathbb{Z}$.

Deci $2013x = k$, adică $x = \dfrac{k}{2013}$, unde $k \in \{1, 2, ..., 2012\}$ și $x \in \left\{\dfrac{1}{2013}, \dfrac{2}{2013}, ..., \dfrac{2012}{2013}\right\}$.

Cazul 3: $x \in (-1, 0) \Rightarrow x = -1 + \{x\}$. Ecuația devine $\{2013x\} = 1$, imposibil. Prin urmare, $x \in \left\{0, \dfrac{1}{2013}, \dfrac{2}{2013}, ..., \dfrac{2012}{2013}\right\}$.

22. Se consideră numerele naturale a, b și n, cu $(a, n) = 1$. Calculați $S_n = \left\{\dfrac{a+b}{n}\right\} + \left\{\dfrac{2a+b}{n}\right\} + \left\{\dfrac{3a+b}{n}\right\} + ... + \left\{\dfrac{na+b}{n}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

(Concursul „Viitori Olimpici.ro“, Câmpulung Muscel, 2013)

Rezolvare:

Avem relația $ka + b = nc_k + r_k$, unde $c_k, r_k \in \mathbb{N}$, c_k și r_k unice, cu $0 \le r_k < n$ și $k \in \{1, 2, 3, ..., n\} = A$ (**teorema împărțirii cu rest**).

Arătăm că $r_i \ne r_j$, oricare ar fi $i, j \in A$, cu $i \ne j$. Presupunem prin absurd că există $i, j \in A$ cu $i \ne j$ astfel încât $r_i = r_j$.

În acest caz avem $i \cdot a + b = nc_j + r_i$ și $ja + b = bc_j + r_j$ cu $0 \le r_i, r_j < n$.

Rezultă imediat că $a(i - j) = n(c_i - c_j)$ și cum $(n, a) = 1$, ajungem că $n / i - j$, contradicție pentru că $1 \le |i - j| < n$.

Prin urmare, numerele $ka + b$, unde $k \in A$, dau resturi distincte două câte două la împărțirea cu n și $\{r_1, r_2, ..., r_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$.

În final, conchidem că $S_n = \dfrac{r_1}{n} + \dfrac{r_2}{n} + ... + \dfrac{r_n}{n} = \dfrac{0}{n} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + ... + \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{(n-1)n}{2n} = \dfrac{n-1}{2}$.

23. Fie x, y numere raționale nenule. Arătați că dacă $\dfrac{x\sqrt{5} + y\sqrt{3}}{y\sqrt{5} + x\sqrt{3}}$ este număr rațional, atunci $|x| = |y|$. ***(Concursul „Ștefan Dârțu“, 2011, Gazeta Matematică, 5/2011)***

Rezolvare:

Fie $\dfrac{x\sqrt{5} + y\sqrt{3}}{y\sqrt{5} + x\sqrt{3}} = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Avem $\sqrt{5}\,(x - ay) = \sqrt{3}\,(ax - y)$. Dacă $x - ay = 0$, atunci $ax - y = 0$, de unde $a = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$, adică $x^2 = y^2$ și $|x| = |y|$. Dacă $x - ay \ne 0$, atunci $ax - y \ne 0$ și $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{ax - y}{x - ay} = b$, $b \in \mathbb{Q}_+^*$. Deci $\dfrac{\sqrt{15}}{3} = b$. Fie $b = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$.

Atunci $\dfrac{\sqrt{15}}{3} = \dfrac{m}{n}$, de unde $15 = 9\dfrac{m^2}{n^2}$ sau $15n^2 = 9m^2$ sau $5n^2 = 3m^2$, de unde $5/m$.

Deci $m = 5k (k \in \mathbb{N}^*)$ și $5n^2 = 75k^2$, de unde $n^2 = 15k^2$ și $5/n^2$, adică $5/n$, contradicție.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. a) Să se arate că dintre cinci numere naturale oarecare se pot alege trei cu suma divizibilă cu trei. **b)** Să se demonstreze că oricare 17 numere naturale au proprietatea că printre ele găsim 9 cu suma divizibilă cu 9. **c)** Să se arate că numărul 17 de la punctul **b)** este cel mai mic cu proprietatea de mai sus.

(Concursul „Gazetei Matematice şi Viitori Olimpici.ro", etapa finală, 2010, C-lung Muscel)

2. Se consideră expresia $E(n, m) = n^2 \cdot m + n \cdot m^2 + 2 \cdot n \cdot m + n^2 + m^2 + n + m$.
a) Să se descompună în factori $E(n, m)$. **b)** Arătaţi că oricare ar fi $n, m \in \mathbb{N}$, $E(n, m) \vdots 2$.

3. Se dă numărul $N = 12345654321_x$, unde x reprezintă baza sistemului de numeraţie. **a)** Să se arate că N este un produs de trei pătrate perfecte. **b)** Să se arate că N se divide cu numerele 13431_x şi cu 111111_x. ***(Aida Elena Bălăucă)***

4. Să se arate că expresia: $E = (x^3 - 12x^2 + 48x - 58)(x^3 - 12x^2 + 48x - 70) + 36$ este un cub perfect nenegativ, pentru $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. ***(G.M. 7-8/1993, Valer Pop)***

5. Să se arate că numărul $\underbrace{111...111}_{3k\ cifre}(x)$ se divide cu numărul $133_{(x-1)}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi x este baza de numeraţie. ***(Artur Bălăucă)***

6. a) Aflaţi $a \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $4a^4 - 28a^3 + 69a^2 - 70a + 26$ să fie pătrat perfect. **b)** Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $2n(2n+7)(2n+9)+157$ este cub perfect. ***(Concursul „La Şcoala cu Ceas", Rm. Vâlcea, 2011)***

7. Dacă a, b, c sunt dimensiunile, iar d lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, atunci arătaţi că şi $\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c+d} \in \mathbb{N}$.

8. Să se determine resturile împărţirii numărului 1987^{1987^n}, $n \in \mathbb{N}$ la 331 şi, respectiv, 497. ***(G.M. 2/1988, Artur Bălăucă)***

9. Să se determine resturile împărţirii numărului 1997^{1999^n} la 27, 37 şi 499, unde $n \in \mathbb{N}$. ***(Artur Bălăucă)***

10. Arătaţi că dacă două numere naturale x şi y au ultimele trei cifre aceleaşi, atunci numerele x^n şi y^n au ultimele trei cifre aceleaşi pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Generalizare.

11. Să se determine cel mai mic număr natural a, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, printre numerele $n, n + 1, n + 2, ..., n^2 + n + a$, să existe cel puţin un cub perfect.

12. Să se arate că oricare ar fi x şi y numere întregi, numărul
$A = (x+2002)\cdot(x+2001)\cdot(y-2002)\cdot(y-2001)$ poate fi scris ca o diferenţă a două pătrate de numere întregi. ***(Mihai-Lucian şi Toma Gloambeş)***

13. Fie a, b şi c trei numere întregi şi p un număr natural prim diferit de 2, astfel încât numărul $N = 2a^2 + 3b^2 + 4c^2 - 4bc$ se divide cu p, iar a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu p. Să se demonstreze că $a + b$ se divide la p dacă şi numai dacă $b - 2c$ se divide la p.

14. Să se descompună în factori expresia: $(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2$.

(Etapa locală, Bacău, 1999)

15. Fie a şi b numere reale pozitive cu proprietatea $a + b = a^3 + b^3 = a^5 + b^5$. Să se arate că $a^2 + b^2 = a^4 + b^4 = a^6 + b^6$. ***(G.M. 5/1994, Alexandru Oţet)***

16. Ştiind că $x + \dfrac{1}{x} = 5$ şi $x \neq 0$, să se afle valoarea expresiei:

$$\mathrm{E}(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

17. Fie $a, x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $a = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. Să se calculeze $b = x + \dfrac{1}{x}$, $c = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ şi $d = \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ în funcţie de a. ***(Etapa locală, Arad, 2001)***

18. *Cine este* ***n*****?** Să se determine numărul întreg n ştiind că: $\sqrt{n^4 + n^3 + n + 1} \in \mathbb{Z}$.

(Concursul „Speranţe", Comăneşti, 2010, Artur Bălăucă)

19. a) Arătaţi că numărul $a = 28p^4 - 25p^2 + 11p - 1$ se divide cu $2p - 1$, oricare ar fi $p \in \mathbb{Z}$. **b)** Determinaţi numărul raţional n ştiind că $\sqrt{28n^4 - 25n^2 + 11n - 1} \in \mathbb{Q}$.

(Artur Bălăucă)

20. Fie numerele naturale $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$ şi $y = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n 25}$ cu $n \geq 1$, n număr natural. Arătaţi că $\sqrt{y}$ este număr raţional dacă şi numai dacă numărul x este produsul a două numere naturale nenule, consecutive.

(Concursul „Henri Coandă", Colegiul Militar Câmpulung Moldovenesc, 2010, G.M.)

21. Demonstraţi că numărul $\sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ este iraţional, oricare ar fi numărul natural n nenul. ***(etapa locală, Iaşi, 2011)***

22. Să se arate că numărul $\mathrm{E} = \sqrt{11 \cdot \left[n(n+1)(n+2)(n+3) + 4\right]} \notin \mathbb{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

(Artur Bălăucă)

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că, dacă $a + b + c = 0$, atunci numărul $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ este pătrat perfect.

24. Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care numărul $4^{20} + 4^{1000} + 4^n$ este un pătrat perfect.

25. Considerând numărul $a(n) = \sqrt{4^n + 2^{n+1} + m}$, $m \in \mathbb{N}$, să se demonstreze că dacă $a(0) \in \mathbb{N}$, $a(1) \in \mathbb{N}$, atunci $a(n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ***(Etapa locală, Bacău, 1999)***

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile: **a)** $\frac{x+1}{2}+\frac{2x+1}{3}+\frac{3x+1}{4}+\ldots+\frac{nx+1}{n+1}=n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{x}{1999\cdot 2000}=1999.$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x^2+\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+3}{4}+\frac{x^2+5}{6}+\ldots+\frac{x^2+2001}{2002}=1002.$

(Mihai-Lucian şi Toma Gloambeş)

3. Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x-1}{a-1}+\frac{x-2}{a-2}+\frac{x-3}{a-3}+\ldots+\frac{x-n}{a-n}=\frac{nx}{a}$, $a>n$, $a, n\in\mathbb{N}^*$.

(Etapa locală, Botoşani, 1993)

4. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $\frac{4}{x-11}+\frac{6}{x-9}+\frac{8}{x-7}+\frac{10}{x-5}+\frac{12}{x-3}+\frac{14}{x-1}=6.$

(*Concursul „Ştefan Dârţu”, Vatra Dornei,Artur Bălăucă, 2005*)

5. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{5x^2+mx-3m}{x+1}=5x-1$, unde m este parametru real.

6. Să se rezolve ecuaţia: $\frac{(2m+1)x}{m+1}-\frac{4x+1}{3-m}=x-\frac{(m-7)x-2}{m^2-2m-3}$, unde m este parametru real.

7. Se dă ecuaţia: $m-1=\frac{x}{x+3}$, m fiind parametru real. **a)** Să se discute şi să se rezolve ecuaţia; **b)** Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ pentru care soluţia ecuaţiei este un număr întreg.

(Artur Bălăucă)

8. Ştiind că ecuaţia $(2m+3)x^2+(m+2)x-(m+1)=0$ admite soluţia -1, să se determine parametrul real m şi să se afle cea de-a doua soluţie a ecuaţiei.

(Etapa locală, Botoşani, 1992)

9. Se dă ecuaţia $m^2(x-1)=2m(2x-1)-4x$. **a)** Rezolvaţi ecuaţia în funcţie de parametrul real m; **b)** Pentru ce valori întregi ale lui m, ecuaţia dată are soluţii în $\mathbb{Z}$?

(Etapa judeţeană, Botoşani, 1993)

10. Determinaţi baza y a unui sistem de numeraţie ştiind că $57_y\cdot 36_y=2602_y$. ***(Ion Pîrvu)***

11. În ce sistem de numeraţie avem egalitatea: 30 212 : 132 = 141? ***(Artur Bălăucă)***

12. Să se determine a, b, c, x, y, z ştiind că: $\overline{ab2}_x+\overline{bc3}_y+\overline{ca4}_z=5(3a+4b+6c)+3$ şi $a+b+c=6$.

13. Se dă ecuaţia $3x^2+3y^2+2xy=171$. **i)** Rezolvaţi ecuaţia în $\mathbb{N}$.
ii) Câte soluţii are ecuaţia în $\mathbb{Z}$?

(Concursul „Henri Coandă”, Colegiul Militar Câmpulung Moldovenesc, Artur Bălăucă, 2004)

14. Aflaţi $x \in \mathbb{R}$ din egalitatea: $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1-\frac{1}{(x+2005)^2}\right]=\frac{x-1}{x}$.

(etapa locală, Suceava, Marinela Cristina Cimpoeşu, 2005)

15. a) Arătaţi că nu există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + 4^y = x^3$.
b) Determinaţi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + 6 \cdot 4^y = x^3$. ***(etapa locală, Neamţ, 2005)***

16. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $x^2 + 36x + 99 - 2^y = 0$.

(etapa locală, Galaţi, Valeria Totolici, 2004)

17. Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât: $x^2 + 3x = y^2 + 7y$. ***(etapa locală, Buzău, 2004)***

18. a) Determinaţi numerele naturale de două cifre ce sunt egale cu pătratul sumei cifrelor lor. **b)** Să se determine perechile de numere naturale al căror produs este egal cu triplul sumei cifrelor lor. ***(Etapa locală, Botoşani, 1993)***

19. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\frac{x+y}{2x^2+2y^2+1}+\frac{x+z}{2x^2+2z^2+1}+\frac{y+z}{2y^2+2z^2+1}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+\frac{x^2+z^2}{(x+z)^2}+\frac{y^2+z^2}{(y+z)^2}.$$

(Etapa judeţeană, Buzău, 1998)

20. Să se arate că: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$ şi $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=a^3 \Rightarrow x+y+z=\frac{1}{a}$.

(Etapa judeţeană, Brăila, 1997)

21. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $2x^2-7xy=12-3y^2$.

23. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţiile: **a)** $25x^2 + xy = y + 2$; **b)** $6x^2 + xy + 78 = 12y^2$;
c) $x^2+y^2=xyz$.

24. a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$. **b)** Dacă $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$, calculaţi $x^5-\frac{1}{x^5}$.

(etapa locală, Botoşani, 2003)

25. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuaţiile: **a)** $x^2 + y^2 = x + y$; **b)** $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

26. a) Să se arate că nu există numerele întregi x, y, z astfel încât $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$. **b)** Să se arate că există o infinitate de numere întregi x, y, z astfel încât $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=18$. ***(Concursul "Spiru Haret", 1997)***

27. Să se arate că nu există numere naturale a, b astfel încât $\frac{a^3+b^3}{a-b}=1997$.

(Concursul "Spiru Haret", 1997)

28. Aflaţi perechile de numere întregi cu proprietatea că diferenţa cuburilor este egală cu pătratul diferenţei lor. ***(Concursul „F.T. Câmpan", Iaşi, 2007)***

29. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $|x-1|+|x+2|+|x+3|=7$. ***(Etapa locală, Botoşani, 2001)***

30. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia: $x^{y^z}+x^{z^y}=2050$.
(G.M. 4/1997, Artur Bălăucă)

31. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţiile: **1)** $x^3+xy=y+1$;
2) $x^3=4y+9$. ***(G.M. 8/1997, Artur Bălăucă)***

32. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^3-5y=2$.
(Concursul „Dimitrie Pompeiu", Botoşani, Artur Bălăucă, 2006)

33. Determinaţi $a, x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât: $5x^2-2(a-2)xy+(1+a^2)y^2=1$.
(Concursul G.M., 2000)

34. Demonstraţi că ecuaţia $2x^3+2y^3=u^4-v^4$ are o infinitate de soluţii de forma (x_0,y_0,u_0,v_0) în mulţimea numerelor naturale.

35. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^4+y^4=7^{2004}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Generalizare.
(Concursul „Henri Coandă", Colegiul Militar Câmpulung Moldovenesc, Artur Bălăucă, 2005)

36. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $x^4+y^4+z^4+t^4=5^{2004}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Generalizare.
(„Sinus", 1/2006, Artur Bălăucă)

37. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute în funcţie de parametrul real a ecuaţia: $x^2a^2-a^6=x^2-1$. ***(Artur Bălăucă)***

38. Să se determine toate numerele reale m astfel încât ecuaţia cu necunoscuta x: $\frac{x}{m}+\frac{4-m}{2m}+\frac{m-8}{x}=0$ să admită două rădăcini numere întregi.

39. Să se rezolve ecuaţia în x: $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}=3$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$. Generalizare.

40. Să se afle valorile reale ale parametrului a pentru care ecuaţia în x: $\frac{x^2+a+2}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{2}{1-x}$ are o singură soluţie.

41. Determinaţi numerele naturale a şi b, $a>b$ astfel încât: $(a+b)+(a-b)+ab+\frac{a}{b}=245$.

42. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $(x-1)^2+(x+y)^2+(2y-z)^2=2y$. ***(Artur Bălăucă)***

43. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia: $x^2+y^2+z=4x+2y$.
(Etapa locală, Botoşani, 1990)

44. Determinaţi o pereche de numere naturale (x, y) astfel încât $x^3-y^3=5y^2+58$.
(Etapa locală, Botoşani, 2001)

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

PUNCTE, DREPTE, PLANE. PARALELISM. UNGHIUL A DOUĂ DREPTE
(Temă pentru centrul de excelență)

Probleme rezolvate:

1. Lema de paralelism (teoremă ajutătoare, mai puțin utilizată)
Dacă două drepte paralele *a* și *b* sunt situate, respectiv, în două plane α și β care se intersectează după o dreaptă *c*, atunci *c* este paralelă și cu *a* și cu *b*.

Demonstrație:

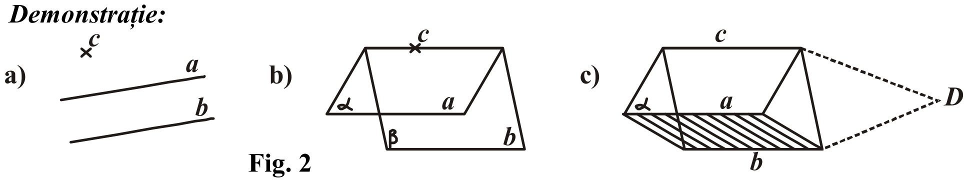


Fig. 2

Se pune mai întâi problema existenței a două plane α și β cu proprietățile din enunț. Este suficient să considerăm un punct *C* care nu se află în planul determinat de dreptele paralele *a* și *b*. Putem lua α = (*C*, *a*) și β = (*C*, *b*). Deoarece C ∈ α ∩ β rezultă că există dreapta *c* astfel încât α ∩ β = *c* și *C* ∈ *c*.
Acum arătăm că *a* ∥ *c* și *b* ∥ *c* (**fig. 2**).
Dacă prin absurd dreptele *b* și *c* nu ar fi paralele, fiind coplanare (conținute în planul β), ele ar avea punctul *D* comun. Fie planul γ = (*a*, *b*). Din *D* ⊂ *b* și *b* ⊂ γ rezultă *D* ∈ γ. Însă *D* ∈ α pentru că *D* ∈ *c* ⊂ α. Deci *D* ∈ α ∩ γ, adică *D* ∈ *a*. Prin urmare, ar rezulta că *D* ∈ *a* ∩ *b*, în contradicție cu ipoteza. Analog, se arată că *a* ∥ *c*.

2. Teorema lui Desargues
Fie semidreptele *a, b, c* necoplanare cu originea comună *O*. Pe semidreapta *a* luăm punctele *A*, *A'*, pe semidreapta *b* luăm punctele *B*, *B'*, iar pe semidreapta *c* luăm punctele *C*, *C'* astfel încât laturile triunghiurilor (*ABC*) și (*A'B'C'*) să nu fie, respectiv, paralele. Atunci dreptele *AB* și *A'B'*, *BC* și *B'C'*, *CA* și *C'A'* se intersectează în trei puncte coliniare *P*, *M* și, respectiv, *N*.

Demonstrație:
Mai întâi, arătăm că dreptele *AC* cu *A'C'*, *AB* cu *A'B'* și *BC* cu *B'C'* se intersectează iar punctele lor de intersecție sunt coliniare (**fig. 3**).
Deoarece punctele *C*, *C'* ∈ *C* și *A*, *A'* ∈ *a* iar dreptele *a* și *c* sunt concurente în punctul *O* rezultă că punctele *A*, *C*, *A'*, *C'* sunt coplanare conținute în planul (*a*, *c*). Din ipoteză se știe că dreptele *AC* și *A'C'* nu sunt paralele. Prin urmare, *AC* ∩ *A'C'* = {*N*}. Analog se arată că *AB* ∩ *A'B'* = = {*P*} și *BC* ∩ *B'C'* = {*M*}. Pentru a finaliza demonstrația să ne asigurăm că punctele *M, N, P* sunt coliniare.

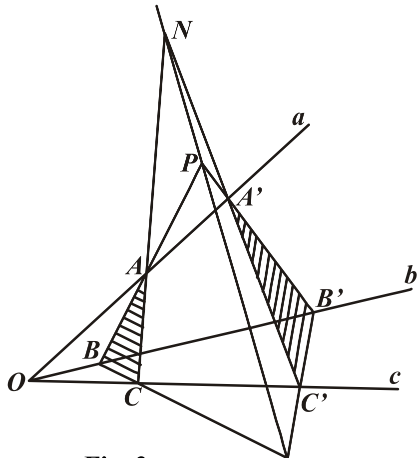


Fig. 3

Într-adevăr, punctele M, N, P fiind situate pe dreptele BC, AC și, respectiv, AB sunt conținute în planul (ABC) (planul (ABC) există deoarece punctele A, B, C sunt situate pe 3 semidrepte necoplanare).
Însă punctele M, N, P din aceleași considerente aparțin și planului ($A'B'C'$) și urmează că acestea sunt situate pe dreapta de intersecție a planelor (ABC) și ($A'B'C'$), adică sunt coliniare.

Observații:

1. Dacă $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, atunci $(ABC) \parallel (A'B'C')$ și $AB \parallel A'B'$.

2. Dacă două din laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$, de exemplu, BC și $B'C'$ sunt paralele, iar restul enunțului (a ipotezei) rămâne același, atunci se arată cu ușurință că dreptele BC și MP sunt paralele, (**fig.4**) aplicând **lema de paralelism**. (problema 1)

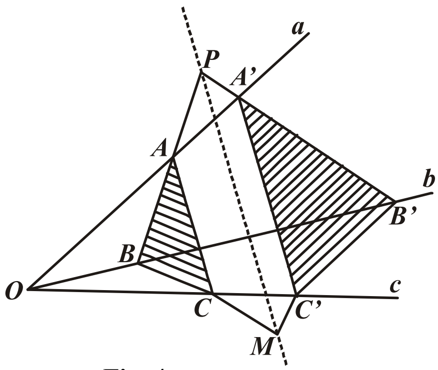


Fig. 4

3. Dacă convenim că două drepte paralele au un punct comun (punctul este la infinit) și că două plane paralele au o dreaptă comună (dreapta este tot la infinit), în ipoteza teoremei lui **Desargues**, nu mai este necesar să precizăm că laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ nu sunt respectiv paralele.

3. Demonstrați că dacă patru drepte paralele determină, pe un plan dat, vârfurile unui paralelogram, atunci determină pe orice plan care le taie vârfurile unui paralelogram.

Demonstrație:
Fie a, b, c, d patru drepte paralele care determină pe planul α vârfurile paralelogramului $ABCD$ și planul β, oarecare, care intersectează dreptele a, b, c, d în punctele A', B', C', respecvtiv, D' (**fig. 5**).
Evident dreptele a, b, c, d nu sunt coplanare și atunci există planele (a, b), (a, c), (c, d) și (b, d).
Din $a \parallel b$, $AC \parallel BD$, $a \cap AC = \{A\}$, $b \cap BD = \{B\}$ rezultă că $(a, c) \parallel (b, d)$. Analog se arată că $(a, b) \parallel (c, d)$. Din $(a, b) \parallel (c, d)$ și $B \cap (a, b) = A'B'$ și $B \cap (c, d) = C'D'$ rezultă că $A'B' \parallel C'D'$. Analog, se arată că $A'C' \parallel B'D'$.

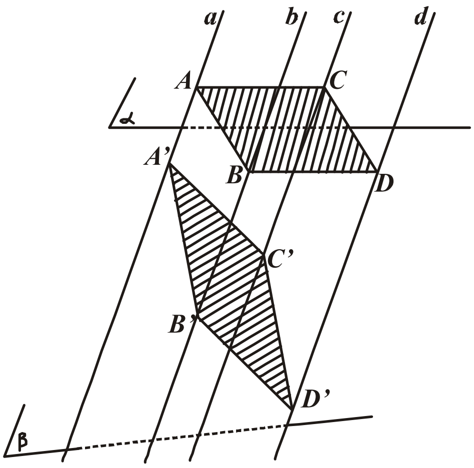


Fig. 5

4. Prin vârfurile *A, B, D și E* ale hexaganului regulat *ABCDEF* se consideră dreptele *a*, *b*, *d* și *e* astfel încât *a* ∥ *b* ∥ *d* ∥ *e* ∥ *a*. De aceeași parte a planului (*ABC*), pe dreptele *a, b* și, respectiv, *d*, se iau punctele *A', B', D'* astfel încât lungimile segmentelor [*AA'*], [*BB'*] și [*DD'*] exprimate în centimetri sunt egale cu: $AA' = 2^{2012} + 2^{2011} + 2^{2010}$, $BB' = 2^{2013}$ și $DD' = 2^{2010}$. Dacă planul (*A'B'D'*) intersectează dreapta *e* în punctul *E'*, aflați distanța dintre punctele *E* și *E'*.

(Concursul „Matematica, de drag“, Bistrița, 2013, Artur Bălăucă)

Rezolvare: Varianta 1

Se arată că patrulaterul *A'B'D'E'* este paralelogram, de unde *E'D'* ∥ *A'B'*, **(1)** (problema precedentă).
Fie punctul $M \in (BB')$ astfel încât $(MB) \equiv (DD')$ $(= 2^{2010})$, (**fig. 6**). Observăm că $2^{2013} = 2^{2010} + (2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012})$, de unde rezultă că $BB' = AA' + DD'$. Patrulaterul *MBDD'* este paralelogram pentru că *MB* ∥ *DD'* și *MB* = *DD'*. Deci *BD* ∥ *MD'* și *BD* = *MD'*. Însă *BD* ∥ *AE* și *BD* = *AE* (*ABDE* este dreptunghi).
Deci *MD'* ∥ *AE* și *MD'* = *AE*, adică *AMD'E* este paralelogram, de unde *AM* ∥ *D'E*, **(2)**. Din *AA'* = *MB'* și *AA'* ∥ *MB'* rezultă că *AMB'A'* este paralelogram, de unde *AM* ∥ *A'B'*, **(3)**. Din **(2)** și **(3)** rezultă că *D'E* ∥ *A'B'*, **(4)**. Din **(1)** și **(4)** rezultă *E* = *E'* (**axioma paralelelor**) și d(*E*, *E'*) = 0.

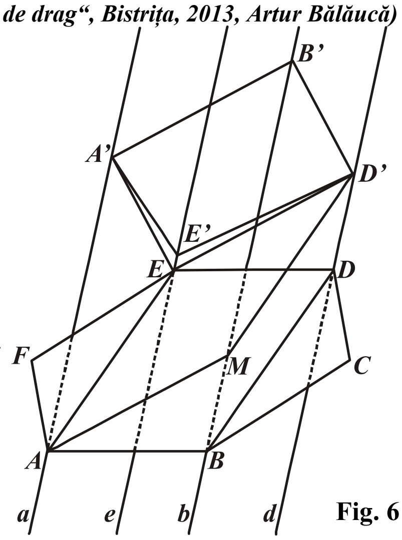


Fig. 6

Varianta 2

Fie $B'D' \cap BD = \{M\}$, $A'D' \cap AD = \{N\}$ și $AB \cap A'B' = \{P\}$. Avem $(A'B'D') \cap (ABD) = MN$, deci $P \in MN$. Arătăm că $E \in MN$, adică $e \cap (A'B'D') = \{E\}$. $\Delta MDD' \sim \Delta MBB'$, $\Delta NDD' \sim \Delta NAA'$ și $\Delta PAA' \sim \Delta PBB'$ (**t.f.a**) de unde $\frac{MD}{MB} = 18$, $\frac{PA}{PB} = \frac{7}{8}$. Patrulaterul *ABDE* este dreptunghic cu $AE = AB\sqrt{3}$. Din $\frac{PA}{PB} = \frac{7}{8} \Rightarrow PA = 7AB$ și din $\frac{MD}{MB} = \frac{1}{8}$ rezultă $MB = \frac{8\sqrt{3}}{7}AB$.

Avem $\text{tg}(\widehat{APE}) = \frac{AE}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{7}$ și $\text{tg}(\widehat{MPB}) = \frac{\sqrt{3}}{7}$. Deci $\widehat{APE} \equiv \widehat{MPB}$ și $E \in MN$ iar $E = E'$.

5. Se consideră cubul *ABCDA'B'C'D'* și *P* un punct variabil pe [*AB*]. Planul α perpendicular în *P* pe *AB* intersectează *AC'* în *Q*. Notăm cu *M* mijlocul lui [*A'P*], cu *N* mijlocul lui [*BQ*] și $BC' \cap B'C = \{O\}$.

a) Să se arate că $A'O \perp BC'$ și *PQ* ∥ *BC'*.

b) Să se arate că dacă *P* este mijlocul lui [*AB*] atunci punctele *P*, *N*, *O* sunt coliniare.

c) Să se determine valoarea minimă a unghiului dintre dreptele *MN* și *BC'*.

(Concursul „Prin labirintul Matematicii“, Baia Mare, 2014)

Rezolvare:

a) [*A'O*] este mediană în Δ*A'BC'*, de unde rezultă că $A'O \perp BC'$. Fie $\alpha \cap CD = \{F\}$, $\alpha \cap D'C' = \{G\}$ și $\alpha \cap A'B' = \{H\}$. Din $\alpha \perp [AB]$ și $(BCC') \perp AB$ rezultă că $\alpha \parallel (BCC')$. Deci $\{Q\} = PG \cap AC'$ și *PQ* ∥ *BC'*. (**fig. 7**)

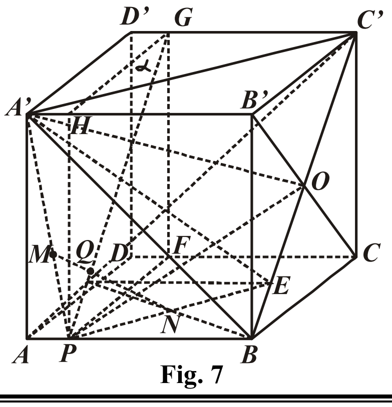


Fig. 7

b) $[OP]$ este linie mijlocie în $\Delta ABC'$, iar $[PN]$ este linie mijlocie în ΔABQ, deci $PN \parallel AC'$ și $PO \parallel AC'$, de unde $N \in (OP)$.
c) Fie $QE \parallel AB$, $E \in (BC')$. Cum $PQ \parallel BE$ rezultă că $PBEQ$ este paralelogram. Deci N este mijlocul segmentului (PE), iar (MN) este linie mijlocie în $\Delta A'PE$, adică $MN \parallel A'E$ și $\sphericalangle(MN, BC') \equiv \sphericalangle(A'E, BC')$. În $\Delta A'BC'$ echilateral, $(A'E)$ este ceviană și $m(\sphericalangle A'EO) \geq 60°$. La fel $m(\sphericalangle A'EC') \geq 60°$ (**teorema unghiului exterior**).
Prin urmare, $\min[m\sphericalangle(MN, BC')] = 60°$ și se atinge când $P = A$ sau $P = B$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Fiind date două drepte necoplanare d şi g există un plan unic care conţine dreapta d şi este paralel cu g.

2. Se dau trei plane paralele α, β, γ și punctele A, B în planul α, iar C, D în planul β. Dreptele AC, BC, BD, AD intersectează planul γ în punctele E, F, G, H. Arătați că punctele E, F, G, H sunt vârfurile unui paralelogram.

3. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ cu proprietatea $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor AA', BB', CC', respectiv, DD'. Arătaţi că dacă punctele M, N, P, Q sunt distincte, atunci ele sunt coplanare, iar patrulaterul cu vârfurile în aceste puncte este paralelogram.
(Concursul „Henri Conadă”, Colegiul Militar Câmpulung Moldovenesc, 2010)

4. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D. Fie punctele M, N, P, Q situate în planul (ABC), astfel încât M este mijlocul lui $[AC]$, N este mijlocul lui $[BM]$, P este mijlocul lui $[NC]$ şi Q mijlocul lui $[BP]$. Să se demonstreze că punctele A, N, Q, D sunt coplanare şi că MP este paralelă cu planul (AND).
(*G.M. 1!1988, Mihai Gevelegean*)

5. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D. Fie E mijlocul segmentului $[AB]$ şi F mijlocul segmentului $[CD]$. Să se arate că $EF < \dfrac{AC + BD}{2}$.

6. Paralelele a, b, c duse prin vârfurile A, B, C ale unui triunghi sunt intersectate de un plan α paralel cu (ABC) respectiv în punctele A', B', C'. Fie M, N, M', N' mijloacele segmentelor $[AB], [AC], [A'B'], [A'C']$. Stabiliţi valoarea logică a propoziţiei $(AM'N') \parallel (C'MN)$.

7. Fie piramida patrulateră regulată $SABCD$ şi punctele E, F, M, N, astfel încât: $E \in (SA), F \in (SC), M \in (SD), N \in (BS)$; $BM \neq CE = AF \neq DN$; $m(\sphericalangle BSD) \geqslant 90°$, $(MEF) \cap (ABC) = d; (NEF) \cap (ABC) = g$. Arătaţi că $d \parallel g$. (***Aida – Elena Bălăucă***)

8. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 15$ cm, $BC = 6$ cm, $AA' = 16$ cm, M fiind mijlocul muchiei DD' şi N mijlocul muchiei CC'. Să se calculeze cosinusul unghiului dreptelor AM şi $D'N$.

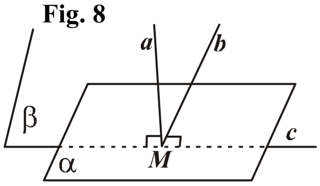
CAPITOLUL II

DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE UN PLAN. PERPENDICULARA COMUNĂ
(Temă pentru centrele de excelență)

➲ ***Rețineți!***

1. Fiind dat planul α şi un punct oarecare M din spaţiu, prin punctul M trece o dreaptă unică perpendiculară pe planul α.

Fig. 8



Demonstrație

Presupunem prin absurd că ar exista două drepte distincte a şi b care conţin punctul M şi sunt perpendiculare pe planul α.

Cazul $M \in \alpha$. **(fig. 8)**
Deoarece $a \cap b = \{M\}$ există planul β unic determinat de dreptele a şi b.
$M \in \alpha \cap \beta$ conduce la $\alpha \cap \beta = c$, dreapta c unică. În planul β avem $a \perp b$ şi $b \perp c$, contradicţie!

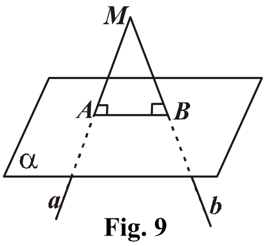


Fig. 9

Cazul $M \notin \alpha$. **(fig. 9)**
Fie $a \cap \alpha = \{A\}$ şi $b \cap \alpha = \{B\}$. Deoarece $AM \perp \alpha$ şi $MB \perp \alpha$, iar $AB \subset \alpha$ rezultă că $MA \perp AB$ şi $MB \perp AB$.

În triunghiul MAB ar exista două unghiuri drepte, contradicţie!

➲ **2.** Fie dreptele distincte a şi b perpendiculare pe planul α. Să se demonstreze că $a \parallel b$.

Demonstrație

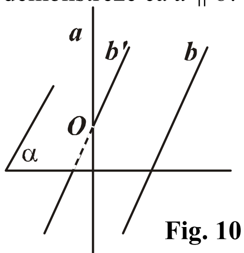


Fig. 10

Presupunem prin absurd că $a \nparallel b$. Fie $a \cap \alpha = \{O\}$ şi considerăm dreapta b' astfel încât $b' \parallel b$ şi $O \in b$'.
Cum $b' \parallel b$ şi $b \perp \alpha$ rezultă că $b' \perp \alpha$. În acest caz prin punctul O ar trece două drepte distincte perpendiculare pe acelaşi plan, în contradicţie cu rezultatul obţinut în problema **1. (fig. 10)**

➲ **3.** Fie dreptele necoplanare a şi b. Există punctele unice N şi M astfel încât $N \in a$ şi $M \in b$, iar $MN \perp a$ şi $MN \perp b$. Dreapta MN se numeşte ***perpendiculară comună*** a dreptelor a şi b.

Demonstrație

Existența

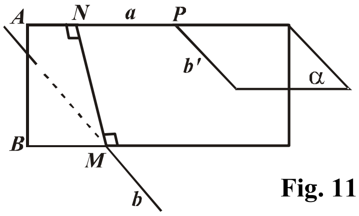


Fig. 11

Fie dreptele a şi b necoplanare. Printr-un punct oarecare P al dreptei a ducem dreapta b' paralelă la dreapta b.
Dreptele a şi b' fiind concurente determină planul α, $\alpha = (a, b')$.
Considerăm dreapta $AB \perp \alpha$ şi fie β planul determinat de dreptele concurente AB şi a.
Notăm $b \cap \beta = \{M\}$ şi ducem $MN \perp a$, $N \in a$. În planul β avem $AB \perp a$ şi $MN \perp a$, deci $AB \parallel MN$. **(fig. 11)** Însă din $AB \perp \alpha$; $AB \perp b'$ ($b' \subset \alpha$) şi $b \parallel b'$ rezultă $b \perp AB$.
Deci $MN \perp b$ şi cum $MN \perp a$ rezultă că dreapta MN este *perpendiculara comună* a dreptelor necoplanare a şi b.

Unicitatea

Presupunem prin absurd că ar mai exista dreapta *M'N'* distinctă de dreapta *MN* astfel încât $MN \perp a$; $MN \perp b$, $M'N' \perp a$ şi $M'N' \perp b$. **(fig. 12)**

Prin punctul *M* ducem dreapta *MN''* paralelă la dreapta *M'N'*. Deoarece $MN \neq MN''$ şi $MN \cap MN'' = \{M\}$ există planul $\gamma = (MN, MN'')$. Se observă cu uşurinţă că $a \perp \gamma$ şi $b \perp \gamma$. În acest caz, conform concluziei **problemei 2**, dreptele *a* şi *b* sunt paralele, în contradicţie cu ipoteza problemei.

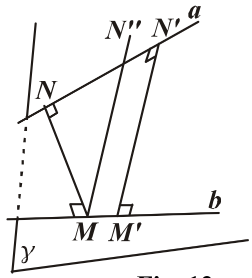


Fig. 12

4. Dacă dreapta *MN* este perpendiculara comună a dreptelor necoplanare *a* şi *b*, atunci oricare ar fi punctele *A* şi *B* cu $A \in a$ şi $B \in b$ avem $MN \leq AB$.
(*Este firesc ca perpendiculara comună a două drepte necoplanare să reprezinte distanţa dintre cele două drepte*.)

Demonstraţie

Fie $NB' \parallel AB$ astfel încât $(NB') \equiv (AB)$. **(fig. 13)** Rezultă că patrulaterul *ANB'B* este paralelogram, de unde $a \parallel BB'$.

Deci $MN \perp BB'$ şi cum $MN \perp MB$ iar $BB' \cap BM = \{B\}$ implică $MN \perp (MBB')$, de unde $MN \perp MB'$. În triunghiul dreptunghic *NMB'*, avem $MN < NB' = AB$.

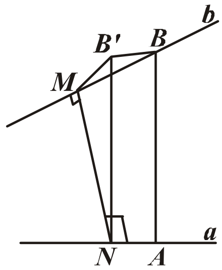


Fig. 13

Probleme rezolvate:

5. Fie *ABCD* un dreptunghi şi *E* un punct în spaţiu. Dacă $\Delta ECB \equiv \Delta CBA$ şi $AC \perp BE$, arătaţi că $E \in (ABC)$.

(Concursul „Gheorghe Mihoc“, Slobozia, 2013, Romanța Ghiță și Ioan Ghiță)

Rezolvare:

Presupunem că $E \notin (ABC)$. Din congrunța $\Delta ECB \equiv \Delta CBA$ rezultă că $(BC) \equiv (AB)$ și $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ECB) = 90°$, iar $(EC) \equiv (BC) \equiv (AB)$. Deci *ABCD* este romb și $AC \perp BD$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Din $AC \perp BD$ și $AC \perp BE$ rezultă că $AC \perp (BDE)$, deci $AC \perp OE$ și ΔACE este isoscel. Urmează $AE = EC = BC = AD$. $BC \perp CD$ și $BC \perp EC$ implică $BC \perp (BCD)$, deci $BC \perp ED$ și $AD \perp DE$. Triunghiul isoscel *ADE* are $m(\sphericalangle ADE) = 90°$, contradicție! Deci $E \in (ABC)$.

6. În centrul *O* al pătratului *ABCD* cu latura de lungime *a* se consideră perpendiculara *d* pe planul acestuia. Să se arate că:

a) Există cel puțin două puncte pe dreapta *d* situate la distanța *a* de punctul *D*.

b) Dacă *E* este unul din punctele determinate la **a)**, atunci $AE \perp CE$.

c) Aflați distanța dintre dreptele *AC* și *DE*.

d) Dacă *M* este un punct mobil (variabil) pe segmentul (*DE*), determinați poziția punctului *M* astfel încât aria triunghiului *MAC* să fie minimă. În acest caz aflați aria triunghiului *MAC*.

(Concursul „Unirea“, Focșani, 2014, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

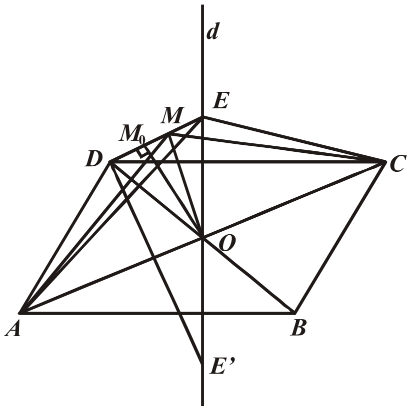


Fig. 14

a) Fie $E \in d$. În ΔDOE dreptunghic, dacă $DE = a$, cum $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ rezultă că $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (**fig. 14**).

Reciproc, dacă $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, atunci $DE = a$.

Însă și punctul E' simetricul lui E față de O satisface condiția dată, $DE' = a$.

b) În ΔAEC, OE este mediană și $OE = \dfrac{AC}{2}$, deci $m(\sphericalangle AEC) = 90°$.

c) Din $AC \perp d$, $AC \perp BD$ și $BD \cap d = \{O\}$, rezultă că $AC \perp (ODE)$, deci $AC \perp OM$, oricare ar fi $M \in DE$. Dacă $OM_0 \perp DE$, atunci $OM_0 \perp AC$ și OM_0 este perpendiculara comună a dreptelor AC și DE. Distanța dintre dreptele AC și DE este $OM_0 = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{a}{2}$.

d) Din $AC \perp (ODE)$ și $OM \subset (ODC)$ rezultă că $AC \perp OM$.

$\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC \cdot MO}{2}$ = minimă dacă MO este minimă, adică $M = M_0$.

$\mathcal{A}_{AMC} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ unități de arie.

7. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a, considerăm punctul $E \in [B'C]$ astfel încât $B'E = \dfrac{1}{4}B'C$. Dacă O' este centrul feței $A'B'C'D'$, aflați:

a) măsura unghiului dintre dreptele $O'E$ și $A'D$.

b) distanța dintre dreptele $O'E$ și $A'D$. ***(Concursul „Unirea“, 2013, Focșani)***

Rezolvare:

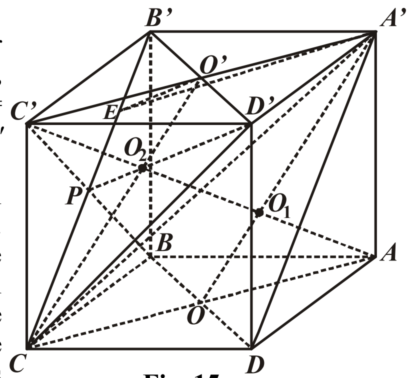


Fig. 15

a) Fie punctul P centrul pătratului $BCC'B'$, iar punctul O centrul pătratului $ABCD$. Avem $A'D \parallel CB'$, deci $m(\sphericalangle(A'D, O'E)) = m(\sphericalangle B'EO') = m(\sphericalangle B'PD') = 90°$ ((EO') este linie mijlocie în $\Delta B'PD'$, iar $\Delta CB'D'$ este echilateral) (**fig. 15**).

b) Din $B'D' \parallel BD$, $A'D \parallel B'C$, $B'D' \cap B'C = \{B'\}$ și $BD \cap A'D = \{D\}$ rezultă că $(B'D'C) \parallel (A'BD)$. Deoarece $AD = AB = AA'$ rezultă că punctul A se află situat pe perpendiculara în centrul cercului circumscris triunghiului echilateral (BDA') pe planul acestuia. Analog, punctul C' se află situat pe perpendiculara în centrul cercului circumscris triunghiului echilateral $CB'D'$, pe planul $(CB'D')$.

Fie punctele O_1 și O_2 astfel încât $\{O_2\} = CO' \cap AC'$ și $\{O_1\} = A'O \cap AC'$. În dreptunghiul $ACC'A'$ folosind **teorema liniei mijlocii** sau **t.f.a.** se obține că $C'O_2 = O_1O_2 = O_1A = \dfrac{AC'}{3}$

și că O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise $\Delta A'BD$ și $\Delta B'CD'$.
Prin urmare, diagonala AC' este perpendiculară pe planele $(B'D'C)$ și $(A'BD)$ și este împărțită de aceste plane în trei părți egale.

Conchidem că $d((B'CD'), (A'BD)) = O_1O_2 = d(A'D, O'E) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Altă abordare:
Deoarece $A'D \parallel (B'CD')$ și $EO' \subset (B'CD')$, urmează că $d(A'D, O'E) = d(A', (B'CD')) = d$.

$\mathcal{V}_{A'B'D'C} = \dfrac{\mathcal{A}_{B'D'C}\cdot d}{3} = \dfrac{\mathcal{A}_{A'B'D'}\cdot CC'}{3}$. Însă $\mathcal{A}_{B'D'C} = \dfrac{B'D'^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ și

$\mathcal{A}_{A'B'D'} = \dfrac{a^2}{2}$. Deci $d = \dfrac{a^2}{2}\cdot a\cdot\dfrac{1}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Fie date numerele reale strict pozitive x, y şi z. Să se demonstreze că numerele $a = \sqrt{z^2 + y^2}$ (cm), $b = \sqrt{x^2 + z^2}$ (cm) şi $c = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cm) pot fi lungimile laturilor unui triunghi ascuţitunghic.

2. Fiind date două puncte distincte A, B şi o dreaptă arbitrară d, să se determine pe d un punct P situat la distanţe egale de A şi B.

3. Fie A, B două puncte distincte în spaţiu şi o dreaptă d astfel încât $A, B \notin d$. Câte puncte $M \in d$ există astfel ca $MA = MB$?

(*Concursul „Alexandru Cojocaru", Roman, 2001*)

4. În patrulaterul strâmb $ABCD$ avem $[AB] \equiv [AD]$ şi $[CB] \equiv [CD]$. Arătaţi că $AC \perp BD$. **(*Etapa judeţeană, Vâlcea, 1988*)**

5. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $[BC] \equiv [CD]$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACD$ şi $\sphericalangle BCD$ intersectează $[AB]$, $[AD]$, $[BD]$ respectiv în M, N şi P. Demonstraţi că $CP \perp MN$.

6. Se dau punctele necoplanare P, A, B, C, D. Dacă $PB \perp CD$, $PD \perp BC$, $PA \perp BD$, să se arate că picioarele perpendicularelor duse din A şi C pe BD coincid.

7. Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC $\left(m(\sphericalangle A) = 90°\right)$ având vârful A într-un punct din spaţiu şi vârfurile B, C pe două drepte necoplanare.

(*G.M. 7!1984, Marian Stan*)

8. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi D un punct al perpendicularei în B pe planul triunghiului. Notăm cu M şi N proiecţiile punctului A pe dreptele BC şi CD, iar cu P şi Q proiecţiile punctului B pe dreptele AD şi CD. Să se arate că: **a)** planele (AMN) şi (BPQ) sunt paralele; **b)** triunghiurile AMN şi BPQ sunt asemenea.

(*G.M. 7!1979, Mihai Miculiţa*)

9. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctele M, N, D astfel încât: $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $D \notin (ABC)$ şi $AM = CN = \frac{1}{3}BC$, iar $AD \perp (ABC)$. **a)** Arătaţi că $BN \perp PD$, unde $\{P\} = NB \cap MC$. **b)** Aflaţi valoarea raportului ariilor $\frac{\mathcal{A}_{AMPN}}{\mathcal{A}_{ABC}}$.

(Concursul „Ştefan Dârţu“, Artur Bălăucă, Vatra Dornei, 2005)

10. Pe planul pătratului $ABCD$, de latură a, se ridică perpendicularele AA', BB', CC', astfel încât $AA' = BB' = CC' = a$. **a)** Arătaţi că $(AB'C) \parallel (A'DC')$. **b)** Calculaţi $d\big((AB'C), (A'DC')\big)$.

11. Pe planul hexagonului $ABCDEF$ de latură a se duce perpendiculara MA cu $MA = a$. **a)** Calculaţi $d(M, BC)$; **b)** Dacă $AP \perp MC$, $P \in MC$, demonstraţi că ΔAPD este dreptunghic. ***(Etapa locală, Botoşani, 2000)***

12. Rombul $ABCD$ şi pătratul $BCEF$ sunt în plane perpendiculare. **a)** Demonstraţi că segmentele AE şi DF au un punct comun M. **b)** Dacă $AC \cap BD = \{N\}$, demonstraţi că $MN \perp (ABC)$; **c)** Dacă $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, aflaţi $m(\sphericalangle AEC)$.

(Etapa locală, Bacău, 2000)

13. Fie triunghiul $ABC : AB = AC = a$ şi $BC = a\sqrt{3}$. Pe perpendiculara ridicată în punctul A pe planul (ABC) se consideră $M \neq A$ şi fie E şi F proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi, respectiv, B pe dreapta MC. **a)** Dacă măsura unghiului dreptelor AE şi BF este u şi $\sin u = \frac{2}{3}$, calculaţi lungimea segmentului MA. **b)** Calculaţi u în cazul în care F coincide cu M. ***(Etapa locală, Bacău, Gh. Gându, 2001)***

14. Se consideră două plane secante α şi β neperpendiculare şi două puncte $A \in \alpha$ şi $B \in \beta$. Proiecţiile punctelor A şi B pe dreapta de intersecţie a celor două plane se notează cu C, respectiv cu D, $C \neq D$, iar perpendicularele duse în A şi B pe planele α, respectiv, β taie planul β în E şi planul α în F. **1)** Să se arate că planele (ACE) şi (BDF) sunt paralele. **2)** Punctele A, E, B, F sunt coplanare?

15. Fie semidreptele $(OA, (OB$ şi $(OC$ astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi $OA = a$, $OB = b, OC = c$. **a)** Determinaţi distanţa dintre dreptele AB şi OC; **b)** Demonstraţi că perpendiculara dusă din punctul O pe planul (ABC) cade în ortocentrul ΔABC; **c)** Dacă H este ortocentrul ΔABC şi $OH \geqslant 1$, atunci $abc \geqslant a + b + c$.

(Etapa locală, Botoşani, 1992)

16. Fie O şi G centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, respectiv ACD, situate în plane diferite, N mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in [AB]$, astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ şi $MN \cap AO = \{E\}$. **a)** Să se arate că $EG \parallel (BCD)$; **b)** Dacă în plus $AO \perp (BCD)$ şi $\frac{BN}{AO} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, să se arate că $BE \perp AN$. ***(G.M. 5/1991, Ştefan Smarandache)***

paralel la dreptele d şi d'. Se proiectează dreptele d şi d' pe planul α. **25.** *Analiza*. Presupunem problema rezolvată. Fie A', B', C', D' proiecţiile punctelor A, B, C, D pe α. Presupunem că $A'B'C'D'$ este paralelogram şi notăm cu O' centrul acestuia. Se constată că O' este proiecţia mijloacelor M, N ale segmentelor AC şi BD pe α, deci α este perpendicular pe dreapta MN (**fig. 97**). *Construcţia*. Considerăm mijloacele M şi N ale segmentelor AC şi BD şi printr-un punct arbitrar O' al dreptei MN construim $\alpha \perp MN$. Planul α, astfel construit, satisface condiţiile din enunţ. *Demonstraţie.* Dacă se notează cu A', B', C', D' proiecţiile punctelor A, B, C, D pe α, atunci O' este mijlocul comun al segmentelor $A'C'$ şi $B'D'$ deci, $A'B'C'D'$ este paralelogram. *Discuţie*. Orice plan perpendicular pe MN îndeplineşte condiţiile date, deci problema admite o infinitate de soluţii. Dacă se consideră mijloacele P, Q ale segmentelor AD, BC şi mijloacele R, S ale segmentelor AB, CD atunci oricare plan perpendicular pe PQ sau RS satisface condiţiile enunţate, deci mulţimea soluţiilor este formată din trei familii de plane perpendiculare, respectiv, pe MN, PQ şi RS. **26. a)** Dacă $OD \perp BC$, $D \in BC$ atunci $D \in (BC)$ şi $AD \perp BC$, deci $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ACB$ sunt ascuţite. Analog se arată că $\sphericalangle BAC$ este ascuţit. **b)** $OD \leqslant \frac{BC}{2}$. **c)** Fie $OE \perp CA$, $E \in CA$. Planele (OAD) şi (OBE) sunt perpendiculare pe (ABC), iar intersecţia lor este OH. **d)** OH este înălţime în triunghiul AOD cu $\mathrm{m}(\sphericalangle AOD) = 90°$. Dacă $OA = a, OB = b, OC = c$ se obţine $OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ şi egalitatea de demonstrat se verifică imediat. **e)** $OH \geqslant 1 \Rightarrow abc \geqslant \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \geqslant \sqrt{ab\cdot bc + bc\cdot ca + ab\cdot ca}$. **27.** Deoarece M este egal depărtat de A, B şi C, P este centrul cercului circumscris ΔABC. Din $P \in AC$, deducem **(1)** $AB \perp BC$. Avem **(2)** ΔMBC echilateral, deoarece $(MB) \equiv (MC)$ şi $\sphericalangle BMC = 60°$, $\mathrm{d}(M; BC)$ este egală cu înălţimea ΔMBC, adică $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Folosind în ΔABC formulele trigonometrice $\Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \overset{\text{T.P}}{\Rightarrow} MP = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Cum $PN = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (N mijlocul lui BC) $\Rightarrow PQ = \frac{a\sqrt{6}}{9}$ unde Q este proiecţia lui P pe dreapta MN, iar $PQ = \mathrm{d}(P, (MBC))$. **28.** Punctele A şi A' se proiectează conform T. 3⊥. în acelaşi punct P, $P \in (BC)$. Prelungim $[A'P]$ cu $[PD]$ astfel încât $[PD] \equiv [PA]$. $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$ şi avem $A'B < AB = BD$ şi $A'C < AC = CD$. Urmează $\mathrm{m}(\sphericalangle BA'D) > \mathrm{m}(BDA')$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle DA'C) > \mathrm{m}(\sphericalangle A'DC)$. Sumând rezultă că $\mathrm{m}(\sphericalangle BA'C) > \mathrm{m}(\sphericalangle BDC) = \mathrm{m}(\sphericalangle BAC)$. *Observaţie: Ipoteza că $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ sunt ascuţite este esenţială; dacă punctul P nu este interior segmentului [BC] argumentarea de mai sus nu subzistă şi nici enunţul nu-şi conservă valabilitatea.* **29.** Fie $ABCD$ pătratul (rombul) considerat, $AB = a$ şi A', B', C', D' proiecţiile punctelor A, B, C, D pe α. Utilizând problema **IV. 2.** se deduce că o diagonală a patrulaterului $ABCD$ este paralelă cu α sau inclusă în α. Dacă presupunem că $AC \parallel \alpha$ sau $AC \subset \alpha$, atunci unghiul format de planul (ABC) cu α are măsura egală cu măsura unghiului format de dreptele BD şi $B'D'$. **a)** Ipoteza $\mathrm{m}(\sphericalangle A'B'C') = 60°$, conduce la $A'B' > AB$, ceea ce este absurd, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle B'A'D') = 60°$. Se obţine $B'D' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, deci $\cos(\sphericalangle(BD, B'D')) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **b)** Ipoteza $\mathrm{m}(\sphericalangle BAD) = 60°$, conduce la $A'B' > AB$, absurd, deci $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60°$. Se obţine $BD = a\sqrt{3}$, $B'D' = a$, deci $\cos(\sphericalangle(BD, B'D')) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **30. a)** Reducere la absurd: Presupunem ca niciuna dintre laturile unghiului $\sphericalangle AOB$ nu este paralela cu α. $O'B' \perp O'A'$ şi $O'B' \perp O'O$ implică $O'B' \perp (O'A'A)$ de unde rezultă că $O'B' \perp OA$, $OA \perp O'B'$, $OA \perp OB$ şi OB, $O'B'$ coplanare şi neparalele implică $OA \perp (OO'B')$ de unde se deduce $OA \parallel \alpha$, contradicţie cu ipoteza reducerii la absurd (**fig. 98a**) **b) i)** $ABCD$ fiind romb, avem $AB = BC = CD = AD = a$, $AC \perp BD$ şi, cum măsura unghiului $\sphericalangle BAD = 60°$, mai rezultă $BD = a$ şi $AC = a\sqrt{3}$. Fie O centrul rombului şi O' centrul pătratului $A'B'C'D'$. Se arată că $OO' \perp (ABC)$. $A'B'C'D'$ fiind pătrat, rezultă că $m(\sphericalangle A'O'B') = 90°$; Conform problemei **a)** rezultă că $A'C' \parallel \alpha$, de unde se deduce $A'C' = AC = a\sqrt{3}$. Cum $A'B'C'D'$ este pătrat, se obţine şi $B'D' = a\sqrt{3}$. Dacă se consideră $B'E \perp D'D, E \in DD'$, atunci $BB' + DD' = D'E =$ $= \sqrt{B'D'^2 - B'E^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$

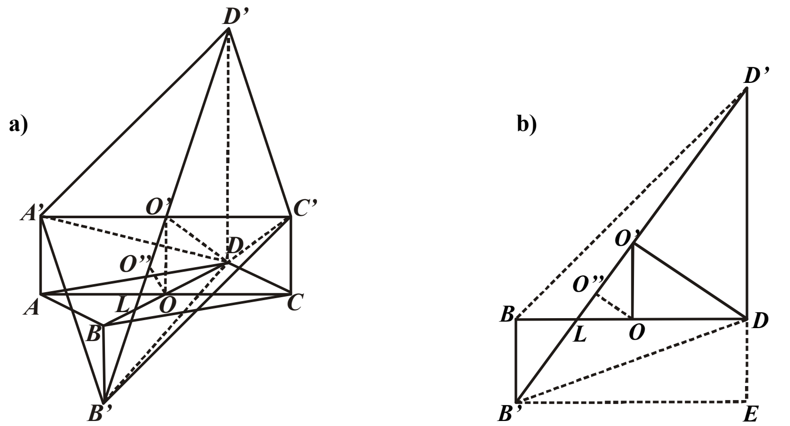


Fig. 98

ii) Dacă $DA'B'C'D'$ este piramidă regulată, atunci $A'B'C'D'$ este pătrat deci sunt îndeplinite condiţiile demonstrate la **i)** şi, în plus: $DO' \perp (A'B'C')$ şi $DA' = DB' = DC' = DD'$. Din $CD = BD$ şi $DB' = DC'$ rezultă $\triangle DBB' \equiv \triangle DCC'$ (I.C.) ceea ce implică $BB' = CC'$ şi cum $CC' = OO'$, rezultă $BB' = OO'$. Cum $OO' = \dfrac{DD' - BB'}{2}$ ($BB'DD'$ este trapez), iar $BB' + DD' = a\sqrt{2}$, se obţine $BB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ şi $DD' = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. Distanţa de la punctul O a planul $(A'B'C')$ este O'' unde O' este proiecţia punctului O pe dreapta $B'D'$. OO'' se poate determina din asemănări de triunghiuri sau ca înălţime din triunghiul $\Delta OO'L$, unde L este intersecţia dreptelor BD şi $B'D'$; $OO'' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. (**fig. 98b**)

CAPITOLUL V. PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC. CUBUL

1. Se utilizează inegalitatea mediilor. **2.** Utilizând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice ABC', ADC' şi $AA'C'$ se obţine: $AM = \dfrac{AB^2}{AC'} = \dfrac{AD^2}{AC'} = \dfrac{AA'^2}{AC'}$, de unde rezultă: $(AB) \equiv (AD) \equiv (AA')$.
3. Dacă notăm cu a, b, c dimensiunile paralelipipedului, relaţia din enunţ conduce la: $2ab + 2ac + 2bc =$ $= a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \Leftrightarrow a = b = c,$ adică paralelipipedul este cub.
4. Se utilizează inegalitatea: $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. **5.** Dacă a, b, c sunt dimensiunile paralelipipedului şi x lungimea muchiei cubului din enunţ, rezultă relaţiile: $ab + ac + bc = 3x^2$ şi $abc = x^3$, de unde rezultă $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{x}$. Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ cu egalitate dacă $a = b = c = x$. **6.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice BMN, AMP şi $C'PN$ şi se obţine $AB = BC = CC'$. **7.** „$\Rightarrow$”: Avem $\Delta BMP \equiv \Delta BNP \equiv \Delta BMN$.