MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Anca Pascu
Tehnoredactare: Mioara Benza
Design copertă: Ionuț Broștianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 12-a / coord.: Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Pitești : Cartea Românească Educațional, 2018
Conține bibliografie
Index
ISBN 978-606-8982-01-4

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)
51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

RADU GOLOGAN, ION CICU, ALEXANDRU NEGRESCU
(coordonatori)

Marian Cucoaneș, Nicolae Seimeanu, Traian Tămîian

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a XII-a

(2011–2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Prefață

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniți matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan

Președintele Societății de Științe Matematice din România

PARTEA I

ALGEBRĂ

Partea I
ALGEBRĂ

1.1. Folosind descompunerea polinomului $x^2 + xy + y^2$ în corpul numerelor complexe, arătați că produsul a două numere din mulțimea

$$M = \{m^2 + mn + n^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

este de asemenea în M.

(S:L11.3.aprilie)

1.2. Arătați că se pot alege 4 elemente din $\mathbb{Z}_7$ astfel încât printre acestea să nu existe două distincte cu produsul $\hat{1}$, dar dacă alegem 5 elemente din $\mathbb{Z}_7$ la întâmplare, vor exista totdeauna două cu produsul $\hat{1}$.

(S:L11.7.aprilie)

1.3. Fie funcția $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $f(x) = x^2$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}_n$. Determinați toate valorile $n > 1$ pentru care f este bijectivă.

(S:L11.1.mai)

1.4. Fie G un grup cu 2011 elemente şi H o submulțime nevidă a lui G. Ştiind că $\forall\ x, y \in H \Rightarrow xy \in H$, determinați card H.

(S:L11.2.mai)

1.5. Formula dezintegrării radioactive este $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$, unde N_t reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul t, N_0 reprezintă numărul de nuclee radioactive la momentul inițial şi λ constanta de dezintegrare. Ştiind că cesiul are timpul de înjumătățire de 30 de ani, determinați λ (izotopul cesiu 137 este responsabil de radiațiile de la Cernobâl).

(S:L11.4.mai)

1.6. Dați exemplu de un grup $(G, \cdot)$ cu elementul unitate e pentru care există un număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că ecuația $x^n = e$ are în G mai mult de n soluții.

(S:L11.1.iunie)

1.7. Determinați toate polinoamele, de grad cel mult doi, ireductibile în $\mathbb{Z}_3[X]$.

(S:L11.5.iunie)

1.8. Fie $c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $G = (-c, c)$. Definim pe G legea de compoziție „$\circ$" dată de

$$x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}.$$

Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

(S:L11.4.iunie)

1.9. Indicați trei numere complexe z_1, z_2, z_3 pentru care $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ iar $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ sunt trei numere naturale consecutive.

(S:L11.4.octombrie)

1.10. Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $a^b \in \mathbb{Q}$.

(S:L11.6.octombrie)

1.11. Urmele lăsate la frânarea completă a unui automobil au arătat că frânarea s-a făcut pe o lungime de 120 metri. Se ştie că decelerația automobilului a fost de 20 m/s^2. Ce viteză avea automobilul înainte de frânare?

(S:L11.7.octombrie)

1.12. O minge este aruncată vertical de la sol cu viteza de 100 m/s. Care este înălțimea maximă la care ajunge? (Nu se consideră frecarea cu aerul).

(S:L11.8.octombrie)

1.13. Găsiți un număr natural x cuprins între 1 şi 166 care să aibă proprietatea că $29x - 1$ este un multiplu al lui 167 (adică să se calculeze inversul lui $\widehat{29}$ în grupul multiplicativ $\mathbb{Z}_{167}^{*}$).

(S:L11.1.noiembrie)

1.14. Care este probabilitatea ca alegând două elemente $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ suma lor să fie inversabilă.

(S:L11.7.noiembrie)

1.15. Arătați că mulțimea numerelor naturale de forma $n^2 + 7m^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$ împreună cu operația de înmulțire formează un monoid. (Se poate folosi o descompunere în factori complecşi.)

(S:L11.8.noiembrie)

1.16. Polinomul $f = aX^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ are toate rădăcinile reale şi strict pozitive. Arătați că $b^2 \geq 3ac$.

Nicolae Bourbacuț şi *Ioan Şerdean*, Orăştie **(S:L11.3.decembrie)**

1.17. Există o lege de compoziție „*" pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$, avem $x < x * y < y$?

(S:L11.7.decembrie)

1.18. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{n^2+6n+6}$ ecuația $\left(n+\hat{5}\right)x=\left(n+\hat{7}\right)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Ion Pistrilă, Oravița **(S:L11.8.decembrie)**

1.19. Care sunt subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$?

(S:L12.2.ianuarie)

1.20. Este polinomul $p = X^4 + \hat{1}$ ireductibil în corpul $\mathbb{Z}_7$?

(S:L12.4.ianuarie)

1.21. Care este probabilitatea ca într-o clasă cu 26 de elevi niciunul să nu fie născut în lunile decembrie sau ianuarie? Găsiți o modalitate de a calcula aproximativ acest număr, folosind faptul că pentru n suficient de mare $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este aproximativ „e" adică aproximativ 2,7.

(S:L12.6.ianuarie)

1.22. Notăm prin r, respectiv t, modulul şi argumentul numărului complex $z = x + iy$. Care este ecuația în coordonate x, y din planul cartezian al relației $r = \cos t$?

(S:L12.7.ianuarie)

1.23. Ecranul unui computer este descris de mulțimea de pixeli $A = \{(n, m) \mid 1 \leq n, m \leq 2012\}$. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un pixel acesta să aibă componentele pătrate perfecte?

(S:L12.8.ianuarie)

1.24. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție definite prin: $x \circ y = x + y + a + 3b$ şi $x \perp y = x + y - 2a + 6b$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că $(\mathbb{Z}, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, \perp)$ sunt grupuri comutative.

b) Arătați că cele două grupuri sunt izomorfe.

Georgeta Burtea, Alexandria **(S:L12.1.februarie)**

1.25. Determinați suma coeficienților de ordin impar ai polinomului p, dacă

$$p(X) = X(X^2 - 1)(X^2 - 9)(X^2 - 16).$$

(S:L12.4.februarie)

1.26. Folosind eventual rădăcinile ecuației $z^2 - z + 2 = 0$ arătați că produsul a două numere ce pot fi scrise sub forma $n^2 - nm + 2m^2$, cu $n, m \in \mathbb{Z}$ este de aceeaşi formă.

(S:L12.7.februarie)

1.27. Fie grupul $(G, \cdot)$, $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ astfel încât $d \cdot c = b$, $b \cdot a = d$, $c \cdot a = e$, $b \cdot c = a$. Scrieți tabla de operații a acestui grup.

Dana Heuberger, Baia Mare **(S:L12.2.martie)**

1.28. Se consideră un grup multiplicativ $(G, \cdot)$ în care are loc implicația

$$xy^2 = z^2x \Rightarrow y = z.$$

Demonstrați că G este grup abelian şi $x^2 \neq e$, $\forall\, x \in G \setminus \{e\}$.

Tamara Pele, Sebiş, Arad **(S:L12.2.aprilie)**

1.29. Polinomul $f = X^{2012} - 2012$ are rădăcinile complexe z_k, $k = 1, 2, ..., 2012$. Aflați valoarea expresiei:

$$S = \sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{x_k - 1}.$$

(S:L12.9.aprilie)

1.30. Determinați o condiție necesară şi suficientă pentru ca polinomul $f = X^3 + pX + q$, cu coeficienți reali să aibă toate rădăcinile reale şi distincte. Reduceți la acest caz problema analoagă pentru polinomul cu coeficienți reali $g = X^3 + pX^2 + 2$.

(S:L12.10.aprilie)

1.31. Arătați că oricare ar fi două numere întregi neconsecutive există $n \geq 2$, număr natural, astfel încât ele să fie egale în $\mathbb{Z}_n$. Ce se întâmplă dacă sunt consecutive?

Romanța Ghiță şi *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:L12.1.mai)**

1.32. Care este cea mai mare valoare posibilă a determinantului unei matrice de ordin 3 cu elemente din $\mathbb{Z}_3$?

(S:L12.5.mai)

1.33. Găsiți numerele reale $x \in (0, 2\pi)$ astfel încât

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(1-\cos nx\right)+\sin nx \le \sqrt{3}$$

pentru orice număr natural n.

(S:L12.8.mai)

1.34. Calculați $\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1}$, unde n este un număr natural nenul.

(S:L12.10.mai)

1.35. Fie P un polinom cu coeficienți întregi cu proprietatea că $P(x_i) = 1$ pentru cinci numere întregi distincte x_i. Putem avea $P(n) = 2012$ pentru un număr întreg n?

(S:L12.4.septembrie)

1.36. Demonstrați că pentru orice $n \ge 1$, $\cos 1 + \cos 2 + ... + \cos n < 0{,}55$.

(S:L12.1.octombrie)

1.37. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale prime ecuația:

$$x^y + y^x + 13 = xyz.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti **(S:L12.10.octombrie)**

1.38. Folosind descompunerea polinomului $X^4 + 1$ în $\mathbb{C}$, arătați că produsul a două numere naturale ce se scriu ca sumă de două puteri a patra ale unor numere naturale, este de aceeaşi formă.

(S:L12.3.noiembrie)

1.39. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{11}$ sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=\hat{6} \\ \hat{3}x+\hat{2}y+\hat{4}z=\hat{8} \\ \hat{4}x+\hat{3}y+\hat{2}z=\hat{5} \end{cases}.$$

Alexandra Dragomir, studentă, Sibiu **(S:L12.1.decembrie)**

1.40. Fie M mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Arătați că în M există o infinitate de elemente neutre la stânga şi nici un element neutru la dreapta.

(S:L13.31)

1.41. Fie $(M, \cdot)$ un monoid comutativ finit. Se notează cu a produsul elementelor lui M.

a) Arătați că dacă $x, y \in M$ şi xy este simetrizabil, atunci x şi y sunt simetrizabile.

b) Arătați că dacă a este simetrizabil, atunci M este grup.

(S:L13.32)

1.42. Fie p un polinom monic (cu coeficient dominant 1) cu coeficienți reali, de grad $n \ge 1$. Ştiind că pentru orice $k = 0, 1, ..., n$ avem $p(k) = \frac{k}{k+1}$, determinați $p(n + 1)$.

(S:L13.37)

1.43. Fie A un inel în care $a^2 = 0$ pentru orice $a \in A$. Arătați că $2abc = 0$ pentru orice $a, b, c \in A$.

Daniel Stoica, Canada **(S:L13.75)**

1.44. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă astfel încât graficul ei conține trei puncte coliniare. Arătați că derivata a doua se anulează în cel puțin un punct.

Folclor matematic **(S:L13.112)**

1.45. Considerăm polinomul cu coeficienți complecşi

$$f = aX^3 + bX^2 + cX + d,\ b + c \neq 0,\ a \neq 0,$$

cu toate rădăcinile de modul 1. Demonstrați că numărul $\dfrac{a+d}{b+c}$ este real.

Oana Turcu, Bucureşti **(S:L13.116)**

1.46. Arătați că $f = (X^n - 3)^n - X - 3$ este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aurel Doboșan, Lugoj **(S:L13.152)**

1.47. Dacă p este un număr prim, iar x, y, z numere întregi cu proprietatea că p, $x - y$, $y - z$ şi $z - x$ sunt prime între ele două câte două, arătați că expresia:

$$E = (x - y)^p + (y - z)^p + (z - x)^p$$

se divide cu $p(x - y)(y - z)(z - x)$.

Ovidiu Buică, Ciacova **(S:L13.155)**

1.48. Se consideră polinomul

$$f \in \mathbb{C}[X],\ f = X^{2n} + X^{2n-1} + \ldots + X^2 + X + 1,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

cu rădăcinile x_k, $k = \overline{1, 2n}$. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + x_k} = 11$.

Carmen Olariu, Timişoara **(S:L13.158)**

1.49. Arătați că $4 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

(S:L13.233)

1.50. Arătați că, dacă matricele inversabile $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relația

$$AB + BA = O_n,$$

atunci numărul natural nenul n este par.

(S:L13.234)

1.51. Scrieți numărul $(2^3 + 3^3 + 4^3 - 3 \cdot 24)^3$ sub forma $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, cu a, b, c numere naturale.

(S:L13.239)

1.52. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5$. Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(S:L13.312)

1.53. Pe mulțimea $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se defineşte operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 5bd, ad + bc)$. Fie mulțimea $S = \{(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid u^2 - 5v^2 = 1\}$.

PARTEA a II-a

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Partea a II-a
ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2010}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, arătați că $F(1) > 3$.

(S:L11.6.aprilie)

2.2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = a\sqrt{x}$, unde a este un parametru real. Pentru ce valori ale lui a volumul corpului obținut prin rotirea graficului în jurul axei Ox (paraboloid) este 1?

(S:L11.8.aprilie)

2.3. Folosiți argumente de calcul integral pentru a rezolva următoarea problemă: un mobil se deplasează de la momentul $t_0 = 0$ la momentul $t > 0$, astfel încât accelerația sa este $a(t) = 2t^2 - 1$ pentru orice timp t. Știind că viteza inițială este de 10 m/s, determinați spațiul parcurs după 2 ore.

(S:L11.10.aprilie)

2.4. Există funcții $f : \left[0, \frac{1}{2011}\right] \to \mathbb{R}$, discontinue în toate punctele $\frac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq$ ≥ 2012 și $\int_0^{\frac{1}{2011}} f(x)dx \geq 2011$?

(S:L11.3.mai)

2.5. Arătați că $\int_0^1 \sqrt{x^4 + 8x}\,dx < 2$.

(S:L11.7.mai)

2.6. Determinați coordonatele centrului de greutate al domeniului din plan $D =$ $= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, x \in [0, \pi]\}$.

(S:L11.8.mai)

2.7. Determinați funcțiile integrabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru care $f(x) = \int_0^x tf(t)dt$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(S:L11.9.mai)

2.8. Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

(S:L11.2.iunie)

2.9. Prin $N(t)$ notăm numărul de păstrăvi dintr-un râu, timpul fiind măsurat în săptămâni. La momentul $t = 0$ populația de pești este atacată de un virus, astfel încât legea de scădere a populației este $N'(t) = -2\sqrt{N(t)}$. După câte săptămâni mor toți păstrăvii din râu?

(S:L11.3.iunie)

2.10. Arătați că există cel puțin 2011 funcții $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ continue astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt = 1.$$

(S:L11.7.iunie)

2.11. Există funcții continue și strict crescătoare $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu proprietățile

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{2011}{2012}, f(0) = 0 \text{ și } f(1) = 1?$$

(S:L11.10.iunie)

2.12. Este funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin formula $f(x) = \{\sqrt{2}x\}$ (pentru orice x număr real) continuă?

(S:L11.2.octombrie)

2.13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct în plan ce nu aparține graficului funcției și $A(x_1, f(x_1))$ punctul de pe graficul lui f cel mai apropiat de M. Arătați că:

$$f'(x_1) = \frac{x_0 - x_1}{y_1 - y_0}.$$

(S:L11.9.octombrie)

2.14. Două vârfuri consecutive ale unui trapez au coordonatele $(-a, 0)$, $(a, 0)$ $(a > 0)$ iar celelalte se găsesc pe semicercul de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$. Care este aria maximă a unui astfel de trapez?

(S:L11.10.octombrie)

2.15. Calculați o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cos 2x$, știind că ea trebuie să fie de forma $p(x) \cos 2x + q(x) \sin 2x$, unde p, q sunt polinoame de gradul I.

(S:L11.4.noiembrie)

2.16. Determinați o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \left| x^2 - |2x-1| \right|$.

(S:L11.5.noiembrie)

2.17. Care este legea de mișcare $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a unui mobil dacă accelerația sa la momentul t este $a(t) = t \sin t$, poziția inițială este $s(0) = 0$ iar viteza inițială $v(0)$ este $a > 0$?

(S:L11.6.noiembrie)

2.18. Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}dx = 0,$ folosind criteriul majorării.

(S:L11.9.noiembrie)

2.19. Există funcții nenule $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mărginite și derivabile, astfel încât pentru orice $x \in (0, \infty)$ să avem $f'(x) \geq x \cdot f(x)$?

G.A. Selniță, Mintia, Hunedoara **(S:L11.2.decembrie)**

2.20. Determinați primitivele funcției

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\left(1+x^8\right)}.$$

Costel Bolbotină, Băile Herculane **(S:L11.9.decembrie)**

2.21. Calculați $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$, unde $x \in (0, 1)$.

(S:L11.10.decembrie)

2.22. Arătați că șirurile definite prin relațiile:

$$I_n = \int_0^1 x^n dx \text{ și } J_n = \int_0^1 \sqrt[n]{x} dx$$

sunt convergente. Calculați limitele lor și interpretați geometric rezultatul.

(S:L12.1.ianuarie)

2.23. Folosind eventual faptul că funcția continuă definită prin $g(x) = \sin x^2$ are primitive, determinați derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \int_x^{x^2} \sin t^2 dt$.

(S:L12.3.ianuarie)

2.24. Determinați primitivele funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \left| x - |x-1| \right|$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

(S:L12.5.februarie)

2.25. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcție derivabilă cu proprietatea $f(1) = 1$ și $0 \leq f'(x) \leq 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Arătați că:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \geq \frac{1}{n+2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

G.A. Selniță, Mintia, Hunedoara **(S:L12.6.februarie)**

2.26. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ bijectivă și strict crescătoare cu $f(0) = 0$ și $f(2) = 3$. Demonstrați că $\int_3^4 f^{-1}(x) dx > 2$.

(S:L12.1.martie)

2.27. Aflați funcțiile continue $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea:

$$\frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^{x^2} f(t) dt} = e^{x - x^4},$$

pentru orice $x > 0$.

Nicolae Mușuroia, Baia Mare **(S:L12.5.martie)**

2.28. Funcția $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ verifică relația $(f \circ f)(x) = f(x) - e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Poate avea f primitive? Justificați răspunsul.

Nicolae Mușuroia, Baia Mare **(S:L12.6.martie)**

2.29. Fie M mulțimea funcțiilor $f : [0, 1] \to [0, 1]$ cu proprietatea că $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Construiți un exemplu de funcție din mulțimea M, cu proprietatea că volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției în jurul axei Ox este mai mic decât $\dfrac{1}{2012}$.

(S:L12.7.aprilie)

2.30. Fie M mulțimea funcțiilor $f : [0, 1] \to [0, 1]$ cu proprietatea că $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Arătați că există măcar un element în mulțimea M pentru care volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției în jurul axei Ox este mai mare decât $\pi - \dfrac{1}{2012}$.

(S:L12.8.aprilie)

2.31. Calculați aria domeniului din primul cadran mărginit de hiperbolele $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{2}{x}$ și dreptele $y = x$, $y = 2x$.

(S:L12.2.mai)

2.32. Dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă cu $6\int_0^1 f(x)dx = 5$, arătați că există $a \in (0, 1)$ astfel încât $f(a) = a(a + 1)$.

Florin Rotaru, Focșani **(S:L12.4.mai)**

2.33. Arătați că există o unică funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisface relația $f' = f$ pentru care $f(0) = 1$.

(S:L12.2.septembrie)

2.34. Considerăm o mulțime formată din 101 numere din intervalul $(1, e)$. Arătați că există două dintre acestea, fie ele x, y, astfel încât:

$$|x \ln y - y \ln x| < \frac{e-1}{100} xy.$$

(S:L12.3.septembrie)

2.35. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și funcția definită pe $\mathbb{R}$ prin $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |x - k|$. Dacă F_n este o primitivă a funcției f_n, calculați:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(1) - F_n(0)}{n^2} \text{ și } \lim_{x\to\infty} \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x^2}.$$

Dan Negulescu, Brăila **(S:L12.6.septembrie)**

2.36. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa cu $F(1) = 0$. Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $(c + 1)F(c) + cf(c) = 0$.

Carmen Botea și *Viorel Botea*, Brăila **(S:L12.7.septembrie)**

2.37. Folosind monotonia unei funcții, demonstrați că:

$$2012^{\sqrt{2014}} > 2013^{\sqrt{2013}} .$$

(S:L12.10.septembrie)

2.38. Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât g este o primitivă a lui h şi h este o primitivă a lui g, iar $g(0) = h'(0) = 2$, $g'(0) = h(0) = 1$. Determinați g şi h.

Gabriel Necula **(S:L12.3.octombrie)**

2.39. Calculați

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 + 2x + 1} dx, \ x \in (0, \infty).$$

Gabriel Necula **(S:L12.4.octombrie)**

2.40. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt = \int_{\frac{x+y}{2}}^{y} f(t)dt ,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Ion Nedelcu **(S:L12.5.octombrie)**

2.41. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcție continuă şi $a > 0$. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 \in [0, 1]$ este definit prin:

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + \int_0^{x_n} f(t)dt}{a+1} .$$

Studiați convergența şirului.

Florin Rotaru, Focşani **(S:L12.8.octombrie)**

2.42. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 3x + 1} dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu **(S:L12.9.octombrie)**

2.43. Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin:

$$I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$$

este monoton şi are limita ln 2.

Eugen Radu, Bucureşti **(S:L12.1.noiembrie)**

2.44. Folosind eventual o sumă Riemann convenabilă, arătați că:

$$\sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{k^3} < 1{,}21.$$

(S:L12.7.noiembrie)

2.45. Arătați că:

$$1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2n^2} x^2 \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}, \ \forall\, x \geq 0 \text{ şi } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

PARTEA I. ALGEBRĂ

1.1. (S:L11.3.aprilie) Fie $x, y \in M$. Atunci $x = m^2 + mn + n^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $y = p^2 + pq + q^2$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Rădăcinile ecuației $m^2 + mn + n^2 = 0$ sunt $m_{1,2} = n\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)$. Dacă notăm $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ atunci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Avem $x = (m - m_1)(m - m_2)$, $y = (p - p_1)(p - p_2)$ sau $x = (m - n\varepsilon)(m - n\overline{\varepsilon})$, $y = (p - q\varepsilon)(p - q\overline{\varepsilon})$. Atunci $x \cdot y = (m - n\varepsilon)(p - q\varepsilon) \cdot (m - n\overline{\varepsilon})(p - q\overline{\varepsilon})$. Cum $\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon$ şi $\overline{\varepsilon}^2 = -1 - \overline{\varepsilon}$ rezultă $xy = [mp - \varepsilon(n + q) + nq\varepsilon^2][mp - \overline{\varepsilon}(n + q) + nq\overline{\varepsilon}^2] = [(mp - nq) - \varepsilon(n + q + nq)][(mp - nq) - \overline{\varepsilon}(n + q + nq)] = (u - \varepsilon v)(u - \overline{\varepsilon} v)$, unde $u = mp - nq \in \mathbb{Z}$ şi $v = n + q + nq \in \mathbb{Z}$. Cum $\varepsilon + \overline{\varepsilon} = -1$ şi $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$ rezultă $xy = u^2 - uv(\varepsilon + \overline{\varepsilon}) + v^2\varepsilon\overline{\varepsilon} = u^2 + uv + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$.

1.2. (S:L11.7.aprilie) Alegem $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$ şi din tabla operației rezultă că nu există două distincte cu produsul $\hat{1}$. Dacă alegem 5 elemente din $\mathbb{Z}_7$ la întâmplare, deoarece $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{1}$ şi $\hat{3} \cdot \hat{5} = \hat{1}$, iar $\mathbb{Z}_7$ are 7 elemente rezultă că cel puțin unul dintre cele două cupluri va intra între cele 5 elemente nenule şi vor exista deci totdeauna două elemente cu produsul $\hat{1}$.

$\cdot$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{6}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

1.3. (S:L11.1.mai) Pentru $n = 2$ rezultă că funcția $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $f(x) = x^2$ este bijectivă căci $f\left(\hat{0}\right) \neq f\left(\hat{1}\right)$ şi $f(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Pentru $n \geq 3$ considerăm $\mathbb{Z}_n = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{n-1}\right\}$. Deoarece $f\left(n - \hat{1}\right) = \left(n - \hat{1}\right)^2 = \hat{n}^2 - 2\hat{n} + \hat{1} = \hat{n}\left(\hat{n} - \hat{2}\right) + \hat{1} = \hat{1}$ şi $f\left(\hat{1}\right) = \hat{1}$ rezultă că $f\left(n - \hat{1}\right) = f\left(\hat{1}\right)$ şi deci f nu este injectivă, adică f nu este bijectivă. În concluzie f este bijectivă dacă şi numai dacă $n = 2$.

1.4. (S:L11.2.mai) Pentru a arăta că H este subgrup al lui G este suficient să arătăm că $\forall\, x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$. Presupunem că $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi fie $x \in H$ fixat (deci $x = x_j$ pentru un anumit $j \in \{1, 2, ..., n\}$). Elementele $xx_1, xx_2, ..., xx_n$ sunt din H căci H este parte stabilă. Ele sunt distincte două câte două (căci $xx_i = xx_k \Rightarrow x_i = x_k \Rightarrow i = k$). Atunci $H = \{\, xx_1, xx_2, ..., xx_n \,\}$ şi cum $x \in H$ rezultă că există $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ cu $xx_i = x$, de unde $x_i = e$. Rezultă că $e \in H$. Atunci există $k \in \{1, 2, ..., n\}$ cu $xx_k = e$, de unde $x_k = x^{-1}$ şi deci $x^{-1} \in H$. Cum $\forall\, x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ şi $\forall\, x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ rezultă că H este subgrup al grupului G. Conform teoremei Lagrange rezultă că ord H divide ord G astfel card H divide 2011. Cum 2011 este prim rezultă card $H \in \{1, 2011\}$.

1.5. (S:L11.4.mai) La momentul $t = 30$ de ani, avem $N_t = \dfrac{N_0}{2} \Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda t} = \dfrac{N_0}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\lambda t} = 2 \Leftrightarrow \lambda t = \ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2}{t} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2}{30} \simeq 0{,}023.$

1.6. (S:L11.1.iunie) Considerăm grupul multiplicativ $G = U(\mathbb{Z}_8)$ al elementelor inversabile din monoidul $(\mathbb{Z}_8, \cdot)$. În acest grup $G = U(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$, ecuația $x^2 = \hat{1}$ are în G soluțiile $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$ adică patru soluții. Deci există $n = 2$ cu proprietatea că ecuația $x^2 = e = \hat{1}$ are în G mai mult de $n = 2$ soluții.

1.7. (S:L11.5.iunie) Fie $f = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$, $a \neq \hat{0}$. Atunci f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3$ dacă şi numai dacă nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$. Cum $f(\hat{0}) = \hat{c}$ atunci pentru $c = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{0}) = \hat{0} \Rightarrow f$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3$. Rezultă că $c \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$. C1) Dacă $c = \hat{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este ireductibil dacă şi numai dacă $\begin{cases} f(\hat{1}) \neq \hat{0} \\ f(\hat{2}) \neq \hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \neq \hat{2} \\ a + \hat{2}b \neq \hat{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \hat{1} \\ b = \hat{0} \end{cases}$ sau

$\begin{cases} a = \hat{2} \\ b = \hat{1} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = \hat{2} \\ b = \hat{2} \end{cases}$. Rezultă $f = X^2 + 1$, $f = \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$, $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$. C2) Dacă

$c = \hat{2} \Rightarrow f$ este ireductibil dacă şi numai dacă $\begin{cases} f(\hat{1}) \neq \hat{0} \\ f(\hat{2}) \neq \hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \neq \hat{1} \\ a + \hat{2}b \neq \hat{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \hat{1} \\ b = \hat{1} \end{cases}$ sau

$\begin{cases} a = \hat{2} \\ b = \hat{0} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = \hat{1} \\ b = \hat{2} \end{cases}$. Rezultă $f = X^2 + X + 1$, $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}$, $f = X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$. Obs. Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow f = bX + c$ este ireductibil, $\forall\, b, c \in \mathbb{Z}_3$, $b \neq \hat{0}$.

1.8. (S:L11.4.iunie) $x \circ y = \dfrac{c^2(x+y)}{xy + c^2}$, $\forall\, x, y \in G$. G1) $(x \circ y) \circ z = \dfrac{c^2(x+y)}{xy + c^2} \circ z =$

$= \dfrac{c^2(x+y+z) + xyz}{xy + yz + zx + c^2}$ (1). $x \circ (y \circ z) = x \circ \dfrac{c^2(y+z)}{yz + c^2} = \dfrac{c^2(x+y+z) + xyz}{xy + yz + zx + c^2}$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall\, x, y, z \in G$. G2) $x \circ y = \dfrac{c^2(x+y)}{xy + c^2} = \dfrac{c^2(y+x)}{yx + c^2} = y \circ x$, $\forall\, x, y \in G$. G3) Trebuie demonstrat că $\exists\, e \in G$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall\, x \in G$. Avem $x \circ e = x$, $\forall\, x \in G \Leftrightarrow \dfrac{c^2(x+e)}{xe + c^2} = x \Leftrightarrow e(c^2 - x^2) = 0$, $\forall\, x \in G$, de unde $e = 0$. Deoarece legea este comutativă din $e \circ x = x$, $\forall\, x \in G \Rightarrow e = 0$. G4) Trebuie demonstrat că $\forall\, x \in G$, $\exists\, x' \in G$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$. Din $x \circ x' = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{c^2(x + x')}{xx' + c^2} = 0 \Leftrightarrow x' = -x \in G$. Din $x' \circ x = e \Rightarrow x' = -x \in G$. Din G1, G2, G3, G4